

19. VMTDK-dolgozat

2020

SZÉCHENYI ISTVÁN EGYETEM
GÉPÉSZMÉRNÖKI, INFORMATIKAI ÉS VILLAMOSMÉRNÖKI KAR
MATEMATIKA ÉS SZÁMÍTÁSTUDOMÁNYI TANSZÉK

**HOVA TŰNT A VÁLTOZÁS? ÁRINDEXEK A KORONAVÍRUS
IDEJÉN**

**HOW DID THE CHANGES IN THE PRICES DISAPPEAR?
PRICE INDICES AT THE TIME OF THE CORONAVIRUS
PANDEMIE**

Készítette:

Olexó Tünde

I. évf. gazdaságinformatikus MSc

Széchenyi István Egyetem

Gépészmérnöki, Informatikai és Villamosmérnöki Kar

Témavezető:

Dr. Harmati István

Széchenyi István Egyetem

Gépészmérnöki, Informatikai és Villamosmérnöki Kar

Matematika és Számítástudomány Tanszék



Budapest 2020.

Tartalomjegyzék

0.1. Magyar nyelvű rezümé	6
0.2. Angol nyelvű rezümé	8
1. Bevezetés	11
1.1. Az árindexek története	11
1.2. A fogyasztói kosarak bemutatása, tendencialétezés vizsgálata a koronavírus előtti időkben	12
2. Az árindexek képzése	14
2.1. Kosár nélküli árindexek bemutatása:	14
2.2. Kosárral rendelkező árindexek bemutatása:	16
3. Axiomatikus árindexelmélet	19
4. Az árindexképzés mátrix alapú szemléletmódja	21
4.1. Egyszerű indexképzés 2- és 3-dimenziós modelleken	21
4.2. Az n-dimenziós vektor-mátrix modell	23
4.3. Az n-dimenziós árindex képzés bemutatása az értékmátrixból kinyert adatokkal	26
5. Az árindexképzés problémái	28
5.1. Láncindexek additivitási problémája: Egy összetett feladat az SNA'93-beli numerikus példa nyomán	28

6. A Covid-19 járvány hatásainak vizsgálata	31
6.1. Fogyasztási szokások elemzése a koronavírus tükrében	31
6.2. Szemezgetés a vásárlási szokások részleteiből, az árindexképzés mélyéről, "gazdasági valóságból"	32
7. Árindexképzés Covid-időkben	35
8. A 2d-szelektor transzformáció	40
8.1. A 2d-szelektor eljárás működési elve nagy vonalakban	40
8.2. A Cavallo szorzófaktorok (kis) hatványainak vizsgálata a kisebb COVID- hatásokra való érdeklődés kapcsán	43
8.3. Polár-koordinátás ábrázolásmód, alkalmazása a Covid-hatás, Covid-tűrés vizsgálatára az EU 27 országaira	45
8.4. A Paasche-Laspeyres váltótétel (Paasche-Laspeyres revolving theorem) . .	49
8.4.1. A Paasche-Laspeyres váltótétel 2-dimenziós esete	49
8.4.2. A Paasche-Laspeyres váltótétel bemutatása Magyarország adatain .	53
8.4.3. A Paasche-Laspeyres váltótétel általános, n-dimenziós esete	54
9. Árindexképzés speciális esetekben	59
9.1. Árindexképzés tetszőleges kosarak és egységnyi p_0 esetén	59
9.1.1. Árindexképzés 1-es norma szerinti, „szumma egyenlő 100-ra” normált kosarak és egységnyi p_0 esetén	60
10.A felelős-dimenziók elmélete	61
11.Összefüggés keresés, érdekes megfigyelések, gazdasági okaik feltárása	63
11.1. A súlyválasztás és az árindex közti összefüggés feltárása: régebbi időpontokhoz tartozó súlyokkal kisebb indexekhez jutunk	63
11.2. A 2d-s árvektorok szögeinek vizsgálata az EU-s adatokon	66
12.Összefoglalás	68

A. Ábra jegyzék	70
A.1. Ábrák jegyzéke	70
B. Irodalom jegyzék	73
B.1. Irodalomjegyzék	73

Rezümék

0.1. Magyar nyelvű rezümé

HOVA TŰNT A VÁLTOZÁS? ÁRINDEXEK A KORONAVÍRUS IDEJÉN

Szerző: **OLEXÓ Tünde**, MSc I. évf. (olexo.tunde@gmail.com)

Témavezető: **Dr. HARMATI István**, egyetemi docens

Intézmény: **Széchenyi István Egyetem**, Gépészmérnöki, Informatikai és

Villamosmérnöki Kar, Matematika és Számítástudomány Tanszék, Magyarország

A kutatás témája a koronavírus hatásának, s a változás eltűnés okainak vizsgálata az Európai Unió tagországok árindexeire.

A kutatás alapvető hipotézise, hogy a jelenleg használt árindex-számítási módszerek nem minden esetben alkalmasak a váratlan, gyors változások követésére, és így nem adnak reális képet a Covid-os árak változásáról.

A kutatás célja a létező havi adatokból egyértelműbb eredmények kiszámítása, új matematikai módszerek, algoritmusok és árindex-értelmezésmódok kifejlesztése és alkalmazása. Ennek során figyelembe veszi a közgazdaságtan alapfeltevéseit, néhol megkérdőjelezve azokat. Emellett célja a szubjektivitás kiküszöbölése a Covid-számítás során, automatikus ábrázolásmód kifejlesztése. A meglévő adatokból szeretné a legtöbbet kihozni felhívva a figyelmet az esetleges problémák okaira.

A dolgozat kitér az árindex-számítás történetére, a Covid időkben megfigyelhető fogyasztói kosár változásának okaira, részleteire. Megvizsgálja a pszichológiai viselkedésformák gazdasági hatásait, s operációkutatási célfüggvény váltás, túlélési függvény bevezetés megvalósulására is kitér. Megvizsgálja a Laspeyres, Paasche index-szel kapcsolatos sztereotípiákat. Kimondja és bebizonyítja az ún. Laspeyres-Paasche váltótételt, illetve az általános, kisebb, nagyobb, egyenlőséggel kapcsolatos tételeket. Kifejleszti az ún. Cavallo-szoró-faktorokon alapuló 2d-szelektor eljárást, s alkalmazza gyenge és erős Covid-hatás detektálásra, automatikus szelektálásra, szög megállapításra. Az eredményeket különböző ábrázolási módokkal szemlélteti az EU országaira. Kitér a felelős dimenziók elméletére is, ami a változás eltűnést más irányból közelítve közgazdaságilag magyarázza, s a

2d-szelektor eljárás gazdasági értelmezhetőségével kapcsolatos problémákat is áthidalja a megfelelő absztrakciós, mégis a közgazdasági valóságba illeszkedő szinten.

A kutatás módszerei: a kutatás a vizsgálandó adatokat a KSH és EUROSTAT honlapjáról, az elterjedt számítási módszereket a vonatkozó szakirodalomból illetve publikus honlapokról gyűjti le, illetve fejleszti tovább, ülteti át mátrixos alapokra. Ehhez járul az elméleti matematikai és közgazdasági háttér megvilágítása. Az adatok saját feldolgozása, a 2d-szelektor eljárás megvalósítása Excel táblázatkezelővel, Julia, R, MATLAB, OCTAVE programok és programnyelvek felhasználásával történik. Az alkalmazott grafikus ábrázolásmód, algoritmus, összefüggések és tételek megállapítása szintén saját fejlesztés.

A kutatás végkövetkeztetése, hogy – bár a jelenleg elterjedt módszerekkel a változások általában nem kimutathatók, „eltűnnek”, – a kifejlesztett módszerekkel és ábrázolással a változások jól kimutathatóak.

kulcsszavak: Covid-19, koronavírus, árindex, Paasche-index, Laspeyres-index, Fisher-index, fogyasztói kosár, Cavallo-szorzók, Covid-kosár, kereslet-kínálati görbe, túlélési függvény, 2d-szelektor eljárás, felelős dimenziók elmélete, Paasche-Laspeyres váltótétel, értékmátrix tétel, együttfutás tétel

0.2. Angol nyelvű rezümé

HOW DID THE CHANGES IN THE PRICES DISAPPEAR? PRICE INDICES AT THE TIME OF THE CORONAVIRUS PANDEMIE

Author: **Tünde OLEXÓ**, MSc I. grade (olexo.tunde@gmail.com)

Supervisor: **Dr. István HARMATI**, associate professor

Institution: **Széchenyi István University**, Faculty of Mechanical Engineering, Informatics and Electrical Engineering, Department of Mathematics and Computer Science, Hungary

The purpose of the research is to identify the effect of the coronavirus pandemic on the price indices of the European Union member states and detect the causes of the disappearance of the change.

The basic hypothesis of the research is that the currently used price index calculation methods are not always suitable for tracking unexpected, rapid changes, and thus do not provide a realistic picture of changes in Covid-type prices. The aim of the research is to calculate clearer results from existing monthly price index data, to develop and apply new mathematical methods, algorithms and price index interpretation methods. In doing so, we take into account the basic assumptions of economics and questioning them in some cases. In addition, we want to eliminate subjectivity in the Covid-calculation and to develop an automatic representation mode. The dissertation wants to get out the most of the existing data and results by drawing attention to the causes of any problems that may arise.

The dissertation covers the history of price index calculation, and the reasons and details of the changes in the consumer basket observed in Covid-times. It examines the economic effects of the psychological behaviors, and also covers the presence in the optimization process of the biased utility function: the survival-function. It examines the stereotypes related to the Laspeyres-, and Paasche-index. It states and proves the so-called Paasche-Laspeyres revolving theorem, and in the same time some general, smaller, greater, and equality-related states. It develops the so-called 2d-selector method based on Cavallo-multiplication factors and uses it to detect weak and strong Covid-effect, to execute automatic selection, and angle determination. The dissertation illustrates the results of applying the 2d-selector method of EU countries in different ways. It also covers the theory of the responsible dimensions, which economically explains the disappearance of the change from a different point of view, and also eliminates the problems related to the economic interpretability of the 2d-selector procedure at the appropriate level of abstraction in a way that fits economic reality.

Research methods: the research collects the data from the websites of KSH and EUROSTAT, the common calculation methods from the relevant literature and public

websites, and develops them further and transfers them to matrix bases. It attempts to illuminate the mathematical and economic background of these times and problems. The data processing and implementation of the 2d-selector procedure is done with Excel, Julia, R, MATLAB, OCTAVE programs and programming languages. Determining the applied graphical representation, algorithm, relations and theorems is own development. The conclusion of the research is that - although the changes are not usually detectable with the currently used methods, they “disappear”, - the changes can be detected well with the developed methods and representation.

keywords: Covid-19, coronavirus pandemie, price index, Paasche-index, Laspeyres-index, Fisher-index, consumer basket, Cavallo-multipliers, Covid-basket, demand-supply curve, survival function, 2d-selector procedure, theory of responsible dimensions, Paasche-Laspeyres revolving theorem, value matrix theorem, parallel motion theorem

Köszönetnyilvánítás

Szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Dr. Harmati Istvánnak támogatásáért rengeteg segítségéért. Köszönöm, hogy érdeklődésével, s kedves hozzáállásával segítette a dolgozat, s tanulmányaim előrehaladását.

Köszönöm a Központi Statisztikai Hivatalnak, hogy mindennap „statisztika közelben” lehetek.

Végezetül szeretném megköszönni egyetememnek, a Széchenyi István Egyetemnek, hogy a közgazdaságtan, illetve az alkalmazott matematika gazdasági aspektusa, s informatikai megvalósítási lehetőségei iránt érdeklődésemet felkeltette.

1. fejezet

Bevezetés

1.1. Az árindexek története

Árindexeket már több száz éve képzünk különböző gazdasági folyamatok együttes megfigyelésének és mérésének szempontjából. Először a kosár mentes (avagy súlyozatlannak tekintett), egyszerűbb indexek jelentek meg, majd ahogy egyre mérhetőbbé vált az ár, mennyiség, fejlődtek a módszertanok, s lassan nem kézzel, hanem géppel is lehetett számolni, omlottak le a technikai gátak.

Mégis, egyes szélsőséges időszakokban az egyszerűbb nagyszerűbb elven működő indexképzés mellett a közgazdaságilag kérdéses, s vita tárgyát képező indexek adnak csak releváns eredményt. Máskor pedig „új indexek képzése válik szükségessé”. Így volt ez az I. világháború idején is, ami után –a háború alatt kidolgozott megfigyeléseiből, kiszámított indexeiből, letisztult elméleti gondolataiból– Irwing Fisher megalkotta alapművét, az árindexképzés elméletét 1922-ben (Fisher,1922). Ebben igazolja többek között Fisher-index létjogosultságát is gazdasági szempontból (sok egyéb kiszámolt index-el egyetemben).

1.1.1. Megjegyzés. *A Fisher-indexet Fisher előtt már többen ajánlották (ezt a szerző is jelzi művében), de mivel gazdaságilag nem támasztották mélyen alá, a feledés homályába merült. A Covid-kapcsán is felvetették a Fisher-indexet probléma megoldásként, torzítás minimalizáló tényezőként (Diewert,2020), de mivel jelenleg nem ez használatos, így bár az aktuális Cavallo-súlyokkal számítottunk Fisher-indexet is, nem éreztük az elmélet további körbejárását relevánsnak pár matematikai észrevételen kívül pl. linearitás kapcsán a mátrixos szemléletmóddal foglalkozó fejezetekben. Részben Fisher műve alapján alkotta*

meg Köves Pál az ÉKS-indexet, melyet azóta is használnak az EU-ban különböző fejlettségű országok összehasonlítására (erre mélyebben nem térünk ki a dolgozatban) (Sugár,2020).

A dolgozatban először bemutatjuk a legnépszerűbb árindexeket, s definiáljuk a szükséges alapaxiómákat, majd rátérünk a 2d-szelektor eljárás bemutatására, eredményeire, általános árindex-tételekre, s megmutatjuk, hogyan jelenik meg, illetve tűnik el a Covid-hatás matematikai és közgazdasági szempontból.

1.2. A fogyasztói kosarak bemutatása, tendencialétezés vizsgálata a koronavírus előtti időkben

Az árindexképzés során a termékeket csoportokba szoktuk osztani. Ez a csoportosítás lehet országspecifikus –hazánkban 7 főcsoport van–, s lehet nemzetközi, Európai norma szerinti. Utóbbit nevezzük COICOP csoportosításnak –ebben 12 főcsoport van. A dolgozatban az utóbbival foglalkoztunk a nemzetközi összehasonlíthatóság, továbbá az általános gazdasági folyamatok megfigyelhetőségének céljából. A Cavallo-szorzófaktorok a nemzetközi összehasonlíthatóság miatt szintén erre lettek megállapítva (Cavallo,2020). Ezeket alkalmazzuk a későbbi fejezetekben megtalálható 2d-szelektor eljárás segítségével az európai és magyar adatokra a covid-hatás vizsgálatának céljából.

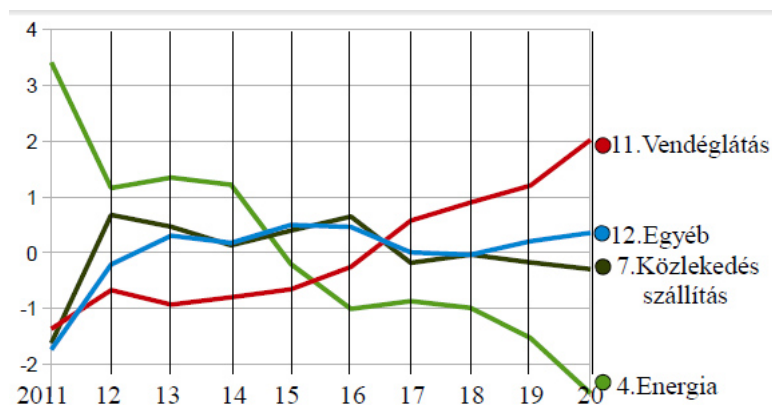
Mielőtt elmélyednénk a koronavírus miatti forgalmi adat-, ár-, árindex-változások feltérképezésében, érdemes megvizsgálni, hogy a koronavírus mentes időszakokban megfigyelhető-e bármilyen tendencia az egyes termékcsoporthoz.

A 2011 és 2020 közti időszakot tekintve az figyelhető meg, hogy az egyes COICOP főcsoportok súlyai leginkább véletlen bolyongás szerűen, s enyhén változnak.

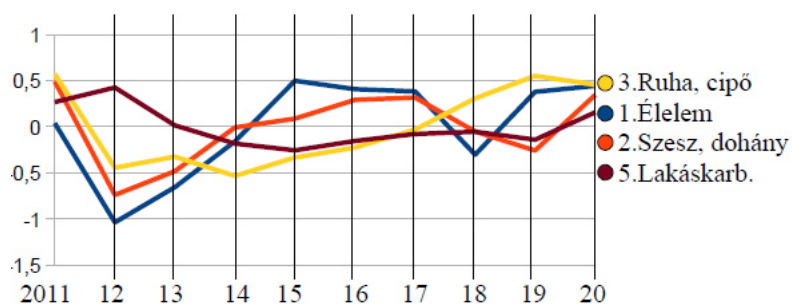
Tendenciát csak 2 főcsoport esetén figyelhetünk meg: a 4-es (energia), illetve 11-es (hotel, vendéglátás) kapcsán. Előbbi oka a rezsicsökkentés, utóbbié pedig a turizmus támogatása (amely a koronavírus járvány egyik legnagyobb vesztese).

Fentről lefelé a COICOP 12 csoportot 4-esével csoportosítottuk változékonyság szerint csökkenő sorrendben. Emiatt az egyes ábrák felbontása különböző.

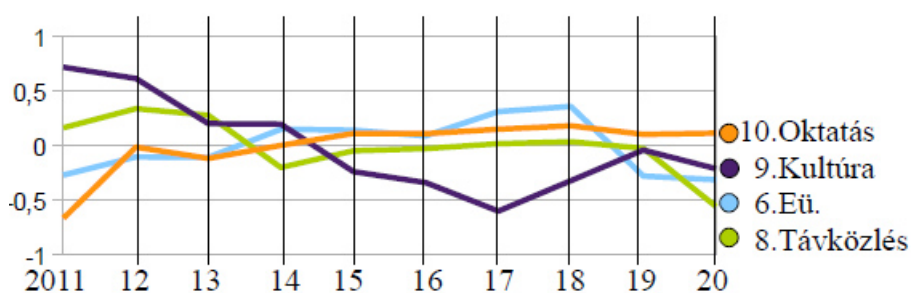
A három ábrán további összefüggést nem sikerült találni.



1.1. ábra. COICOP 11,12,7,4 -es főcsoport kosársúlyainak változásai 2011 és 2020 között



1.2. ábra. COICOP 3,1,2,5 -ös főcsoport kosársúlyainak változásai 2011 és 2020 között



1.3. ábra. COICOP 10,9,6,8 -as főcsoport kosársúlyainak változásai 2011 és 2020 között

1.2.1. Megjegyzés. A tendenciák hiányáról (az említett két kivétel nélkül, a koronavírus előtti időszakra nézve) a kosarak kapcsán több tanulmány is íródott, így konklúzióink nem mond ellent az általános vélekedésnek.

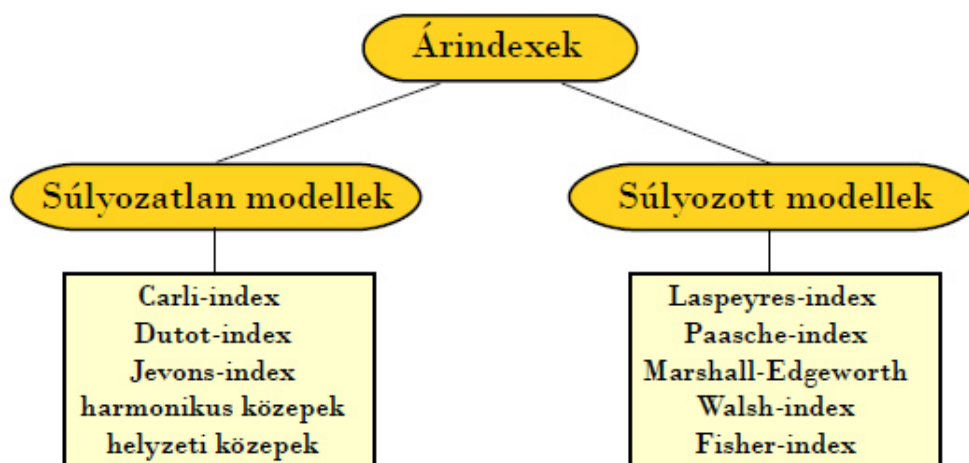
2. fejezet

Az árindexek képzése

2.1. Kosár nélküli árindexek bemutatása:

A legegyszerűbb árindexek mennyiségi adatok (vagyis súlyozás) nélkül képzett értékek. Ezek –a Dutot-indexet kivéve– a Köves Pál által $p_{1/0}$ -nak jelölt relatív árak valamilyen középértékei, vagy helyzeti középértékei (Köves,1981). Használatuk akkor tanácsos, amikor a jelenlegi súlyokról lényeges információnk nincs, s becslésük is bonyolult/lehetetlen. Amikor régi súlyokat használunk nagyon dinamikusan változó esetekben, avagy a közgazdasági: "a kosár lassan változik" alaptézis nem teljesül – a Covid-időszak esetén ez az eltérés, nem teljesülés sokkal látványosabb– általában a súlymentes indexek jobban/valóságghűbben tükrözik a helyzetet, mint a nem aktuális súlyokat használó társaik (pl. Lowe/Laspeyres-típusú index) az empirikus tapasztalatok alapján.

2.1.1. Megjegyzés. *A súlymentességet úgy is tekinthetjük, mintha minden mintaelemhez azonos súlyt rendelnénk (vagyis a súlyozottak speciális esetei).*



2.1. ábra. Árindexek csoportosítása súlyozás szerint (súlyozatlan=ekvidisztánsan súlyozott)

A "kosármentes" indexek egy részét az alábbi táblázatban foglaltuk össze:

Carli-index: relatív árak átlaga.	$P_{Carli} = \frac{1}{n} \sum \frac{p_t}{p_0}$	Dutot-index: átlagárak hányadosa.	$P_{Dutot} = \frac{\sum p_t}{\sum p_0}$
Harmonikus közép: relatív árak harmonikus közepe.	$P_{harm} = \frac{n}{\sum \frac{p_0}{p_t}}$	Harmonikus közepek hányadosa.	$P_{hh} = \frac{\sum \frac{1}{p_0}}{\sum \frac{1}{p_t}}$
Carruthers, Sellwood, Ward, Dalén index	$P = \sqrt{P_{Carli} \cdot P_{harm}}$	Jevons-index: relatív árak mértani közepe.	$P_{Jevons} = \left(\prod \frac{p_t}{p_0} \right)^{\frac{1}{n}}$
log Jevons-index	$\log(P_{Jevons}) = \frac{1}{n} \log \left(\prod \frac{p_t}{p_0} \right) = \frac{1}{n} \sum (\log p_t - \log p_0)$		

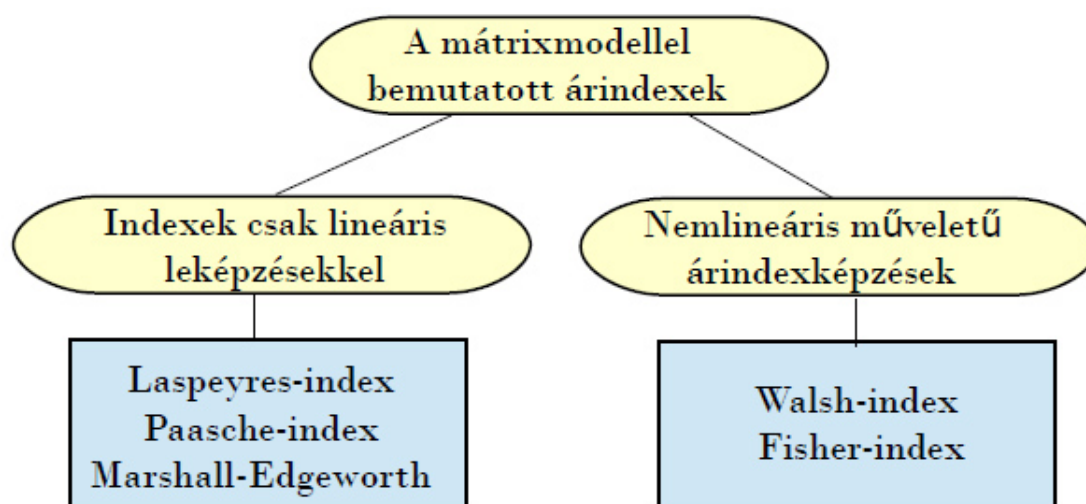
2.2. ábra. Leggyakoribb kosármentes ("súlymentes", ekvidisztáns súlyozású) árindexek összefoglaló táblázata

2.1.2. Megjegyzés. A fenti összetettebb indexek egy része több másikból kombinálva képződik (mint ahogy a képletekből is látható).

2.2. Kosárral rendelkező árindexek bemutatása:

A kosárral rendelkező (súlyozott) indexek nagyobb népszerűségnek örvendenek. Ezek közül a Laspeyres-típusú/Lowe-index emelkedik ki a Fisher mellett. Előbbi használatos a legtöbb EU-s országban az egységes szabályozás óta –mely története s oka szintén érdekes eleme a történelemnek–, utóbbi pedig ajánlott, jóságát szakcikkék tömege bizonyítja (igaz közgazdaságtani „értelmességéről” máig megoszlanak a vélemények) (pl. Diewert,2020; Köves,1981).

2.2.1. Megjegyzés. Hazánkban a szocializmus idején Köves Pál munkásságának hála Fisher-index volt használva egészen az egységes szabályozásig. Ez természetesen a magyar csoportosításra vonatkozik; az EU-s COICOP12 még nem létezett akkoriban (Sugár,2020).



2.3. ábra. Legfőbb árindexek csoportosítása linearitás szerint

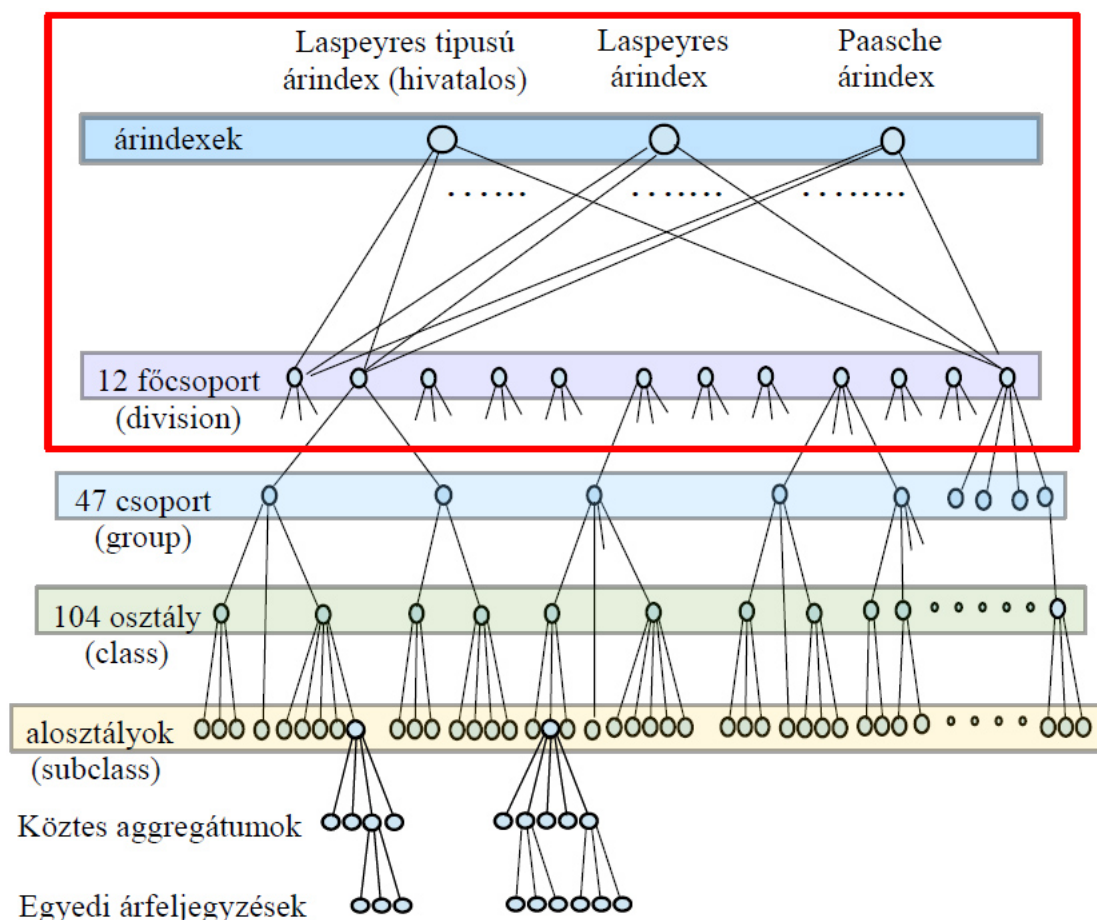
2.2.2. Megjegyzés. A Walsh-index „belül sem lineáris”, a Fisher-index viszont két lineáris index mértani közepeként áll elő, így csak az utolsó lépésben veszti el linearitását. Ezért is tekinthető ideális indexnek.

Legnépszerűbb kosaras („súlyozott”) indexeink:

Laspeyres-index	$P_{Laspeyres} = \frac{q_0 p_1}{q_0 p_0}$	Lowe-index	$P_{Lowe} = \frac{q_1 p_1}{q_1 p_0}$
Paasche-index	$P_{Paasche} = \frac{q_1 p_1}{q_1 p_0}$	Walsh-index	$P_{Walsh} = \frac{\sum (p_1 \cdot \sqrt{q_0 \cdot q_1})}{\sum (p_0 \cdot \sqrt{q_0 \cdot q_1})}$
Fisher-index	$P_{Fisher} = \sqrt{P_{Laspeyres} \cdot P_{Paasche}}$	Marshall-Edgeworth index	$P_{ME} = \frac{(q_0 + q_1) p_1}{(q_0 + q_1) p_0}$

2.4. ábra. Leggyakoribb kosaras („súlyozott”) árindexek összefoglaló táblázata

Az index képzés gyakorlati folyamatát, szintjeit az alábbi ábrán mélyebben ismertetjük:



2.5. ábra. Árindexek számításánál alkalmazott szintek

2.2.3. Megjegyzés. *A dolgozatban csak a lila szint (12 főcsoport) és afeletti résszel foglalkozunk mélyebben. Ezt piros kerettel is kiemeltük.*

3. fejezet

Axiomatikus árindexelmélet

Legyenek p_0, p_1, \dots n -dimenziós árvektorok, és q_0, q_1, \dots a hozzá tartozó mennyiségi vektorok. Legyen $P(p_0, p_1, q_0, q_1)$ árindexfüggvény és $Q(p_0, p_1, q_0, q_1)$ mennyiségi index függvény.

Ekkor az előbbi indexfüggvényeknek a következő táblázatban felsorolt tulajdonságoknak kell eleget tennie:

Szükséges tulajdonságok:	
1. Identitás	$P(\mathbf{p}, \mathbf{p}, \alpha \mathbf{q}, \beta \mathbf{q}) = 1$ minden α -ra és minden β -ra. Közgazdaságilag: Ha az árak változatlanok, akkor arányos kosár mellett az index 1.
2. Arányosság	$P(\mathbf{p}, \lambda \mathbf{p}, \mathbf{q}, \alpha \mathbf{q}) = \lambda$ minden α -ra és minden λ -ra. Közgazdaságilag: Ha az árak λ -szorosra nőttek, akkor arányos kosár mellett az index λ .
3. Skála invariancia	$P(\alpha \mathbf{p}_0, \alpha \mathbf{p}_1, \beta \mathbf{q}_0, \gamma \mathbf{q}_1) = P(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1)$ minden α, β, γ -ra. Közgazdaságilag: Az árak α -szorosai (pl. csomagolási egység változik) és arányos kosár mellett az index változatlan.
4. Időtengely-szimmetria (időpróba)	$P(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1) \cdot P(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_0) = 1$ Közgazdaságilag: Az időtengely irányát megfordítva az index az eredeti érték reciproka.

3.1. ábra. Áridex axiómák 1. rész

5. Monotonitás	$P(p_0, p_1, q_0, q_1) < P(p_0, p_2, q_0, q_1)$ ha $p_1 < p_2$ Közgazdaságilag: Növekvő árak esetén az index is nő.
6. Bázisfüggetlenség	$\frac{P(p_0, p_t, q_0, q_t)}{P(p_0, p_s, q_0, q_s)} = \frac{P(p_1, p_t, q_1, q_t)}{P(p_1, p_s, q_1, q_s)}$ Közgazdaságilag: Itt p_0 - q_0 illetve p_1 - q_1 bázisokkal vizsgáljuk a p_s - q_s értékek viszonyát p_t - q_t -hez.
7. Állandó kosár	Ha q egy fix kosár, akkor $P(p_0, p_t, q, q) = \frac{p_t q}{p_0 q}$
8. Tranzitivitás (láncpróba)	$P(p_0, p_s, q_0, q_s) P(p_s, p_t, q_s, q_t) = P(p_0, p_t, q_0, q_t)$
9. Összemérhetőségi axióma (próba) = „mértékegységek cseréje teszt”	$P(p_0, p_t, q_0, q_t) = P(\Lambda p_0, \Lambda p_t, \Lambda^{-1} q_0, \Lambda^{-1} q_t)$ Közgazdaságilag: Ha egy tetszőleges tétel árait és mennyiségeit egyszerre szorozzuk, illetve osztjuk Λ -val, az index nem változik.
10. Folytonosság	$P(p_0, p_t, q_0, q_t)$ legyen mindenütt folytonos, ahol értelmezve van.
11. Meghatározottság	$P(p_0, p_t, q_0, q_t)$ legyen korlátos 0-t és a végtelent közelítve.
12. Tényezők cserélhetősége (tényezőpróba) Ezt a próbát az alapárindexek (Laspeyres- és Paasche-index) nem teljesítik.	Az árindexnek és az ő implicit mennyiségi indexének hasonló kell legyen a formája. Például: $P(p_0, p_t, q_0, q_t) Q(q_0, q_t, p_0, p_t) = \frac{p_t q_t}{p_0 q_0}$ Más esetekben ez az egyenlőség az alábbi is lehet: $\Delta P(p_0, p_t, q_0, q_t) - \Delta Q(q_0, q_t, p_0, p_t) = p_t q_t - p_0 q_0$
13. Laspeyres-Paasche korlát	Az index nem eshet a Laspeyres és a Paasche-indexek által meghatározott határokon kívül.
14. Középérték	Az index nem eshet a legkisebb és a legnagyobb relatív árak által meghatározott határokon kívül.
15. Szigorú monotonitás	$\delta P(p_0, \Lambda p_t, q_0, \Lambda^{-1} q_t) / \delta \Lambda > 0$

3.2. ábra. Áridex axiómák 2. rész

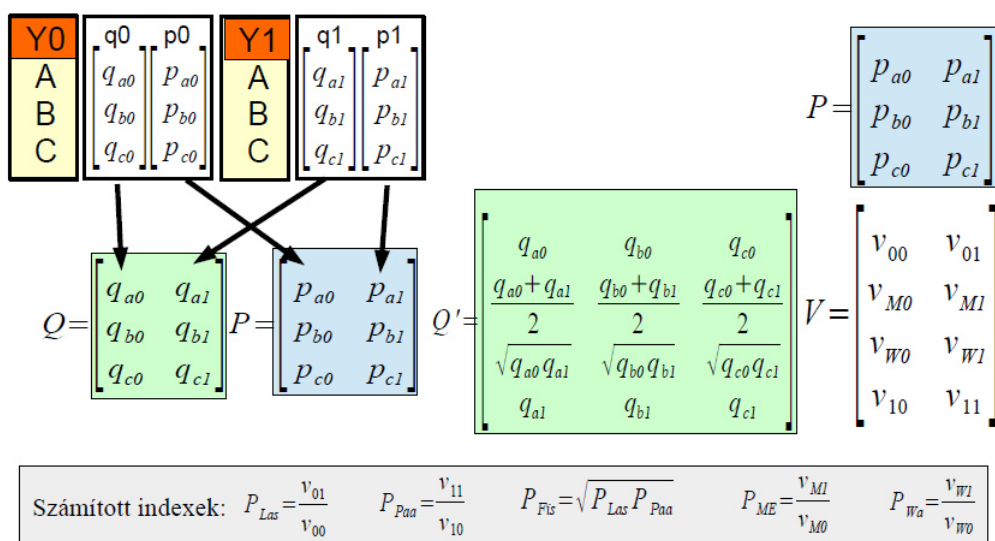
3.0.1. Megjegyzés. Az axiómákat Marshall B. Reinsdorf cikke alapján gyűjtöttük össze (Reinsdorf, 2006), mely I. Fisher cikkein alapul (Fisher, 1922-). A cikk axiómáit közgazdasági értelmezésekkel egészítettük ki.

4. fejezet

Az árindexképzés mátrix alapú szemléletmódja

4.1. Egyszerű indexképzés 2- és 3-dimenziós modelleken

Az alábbi ábra a mátrix-alapú árindexképzést szemlélteti 3-dimenzióban:



4.1. ábra. Egyszerű mátrix szemlélet; 3-dimenziós mátrix-modell

Az ábra elemei, jelölések, tudnivalók:

- Az ábra bal felső sarkában a kezdeti adatokat látjuk.
Külön évenkénti bontásban állnak az A, B és C betűkkel jelzett egyes áruk és javak q mennyiségei és p árai.
- Vektor-mátrix modell esetén az egyes évek q mennyiségei és p árai egy-egy oszlopvektorba rendezhetők. Ezeket a vektorokat vastag betűtípussal jelöljük. (A vektorok vastagon jelölését a dolgozat további részeiben is megtartottuk.)
- Matematikai képletekkel:

$$q_0 = \begin{bmatrix} q_{a0} \\ q_{b0} \\ q_{c0} \end{bmatrix} \text{ és } p_0 = \begin{bmatrix} p_{a0} \\ p_{b0} \\ p_{c0} \end{bmatrix}, \text{ valamint } q_1 = \begin{bmatrix} q_{a1} \\ q_{b1} \\ q_{c1} \end{bmatrix} \text{ és } p_1 = \begin{bmatrix} p_{a1} \\ p_{b1} \\ p_{c1} \end{bmatrix}.$$

- A vektoros kezelésmód következményeként értelmezzük \mathbf{p} és \mathbf{q} vektorok abszolút értékét is az n_2 -es Euklideszi norma szerint.
- A továbbiakban a \mathbf{p} és \mathbf{q} skalár mennyiségek a vektorok abszolút értékét jelentik.
Alatta az oszlopok átrendezésével létrejönnek a \mathbf{Q} és \mathbf{P} mátrixok.
- A mátrixok színezése –zöld a mennyiségi, és kék az ármátrix– következetes. Később a vektorok grafikus ábrázolásánál is ezeket a színeket alkalmazzuk.
- A méretében megnövekedett \mathbf{Q}' mátrix középső sorai középértékvektorok, az egyes elemek számtani és mértani közepei, melyek a Marshall-Edgeworth-, és a Walsh-indexek számításához szükségesek.

4.1.1. Megjegyzés. A \mathbf{Q}' és \mathbf{P} mátrixok szorzataként létrejött \mathbf{V} értékmátrix elemeiből az egyes indexek könnyen számíthatók.

Az alábbi ábrán a fenti modell megvalósítása látható Excel táblázatkezelővel:

A három komponens Függvénytünder Árindexei									
Y0	q0	p0	Y1	q1	p1				
A	5	3	A	2	1				
B	1	1	B	1	1				
C	2	2	C	4	3				
						P=			
						3,00 1,00			
						1,00 1,00			
						2,00 3,00			
						p0 p1			
						20,00 12,00 -q0			
						17,50 13,50 -Marshall-Edgeworth			
						16,14 12,65 -Walsh			
						15,00 15,00 -q1			

Q=						P=							
5	2	3	1										
1	1	1	1										
2	4	2	3										

Q'=						V=Q'P=							
5,0	1,0	2,0											
3,5	1,0	3,0											
3,2	1,0	2,8											
2,0	1,0	4,0											

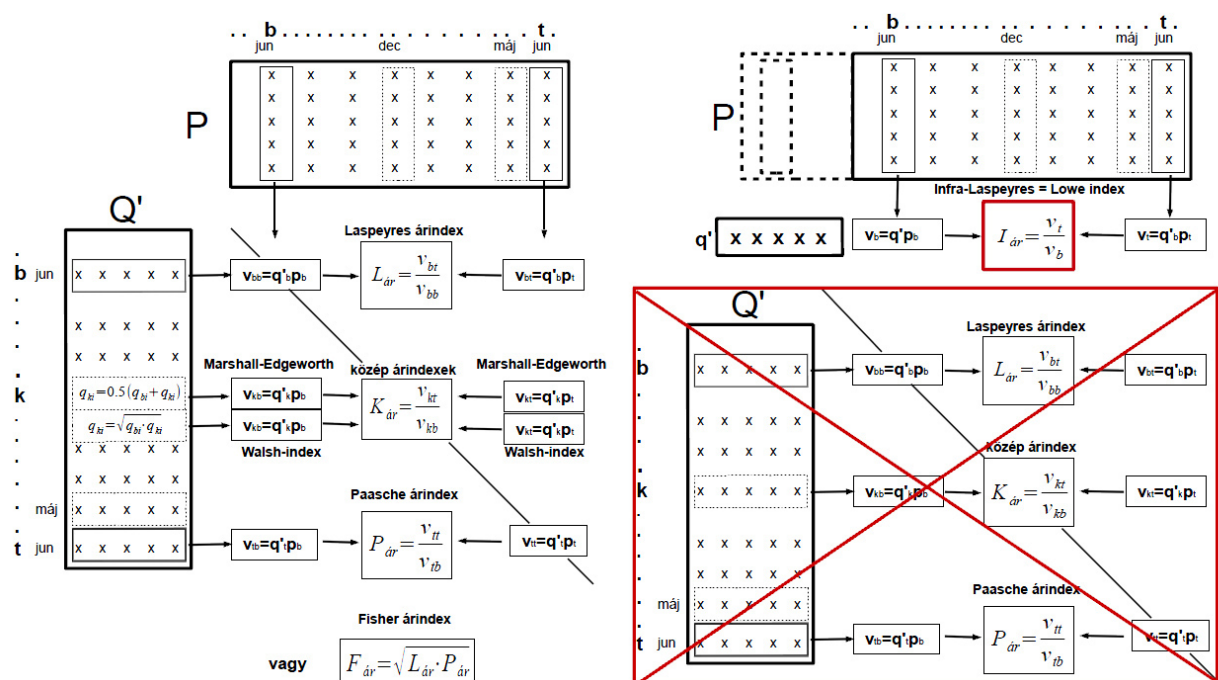
Árindexek:			
Laspeyres	0,600		
Paasche	1,000		
Fisher	0,775		
Marshall-Ed	0,771		
Walsh	0,783		

4.2. ábra. 3-dimenziós modell megvalósítása Excel táblázatkezelővel

4.1.2. Megjegyzés. A fenti példában pont a Laspeyres-index a legkisebb, ami elméleti szinten gazdasági megfontolások szerint felül becsl. (Ezt több példával cáfoltuk valós adatokon dolgozatainkban.)(Olexó,2020)

4.2. Az n-dimenziós vektor-mátrix modell

Árindexek számítása mátrix-alapon:



4.3. ábra. A Laspeyres és Laspeyres-típusú index különbsége; n-dimenziós mátrix modell

4.2.1. Megjegyzés. Az *infra-Laspeyres* egyezik meg az ábrán a *Laspeyres-típusú indexszel*. Neve a képzési módjára utal, s univerzálisabb; párja az *ultra-Paasche*. *Lowe-indexként* is szokás hívni, ami az ábrán szintén szerepel. Ez kerül kiszámításra hivatalosan, található meg az *EUROSTAT* honlapján. Az ábrán a további indexek, viszonyuk is megtalálható számítási módjukkal egyetemben (egy nagy rendszerben).

Az ábra elemei:

- A fenti ábra bal oldalán a \mathbf{P} ármátrix és a \mathbf{Q}' mennyiségi mátrix szorzatának elemeiből –a $\mathbf{Q}'\mathbf{P} = \mathbf{V}$ értékmátrix elemeiből– képezünk különböző árindexeket.
- A \mathbf{P} ármátrix oszlopai a havonkénti árvektorokat tartalmazzák. Általában csak a tárgyhavi (jelenhavi), az előző havi (múlt havi), a múlt decemberi és az előző év ugyanazon hónapja szerinti oszlopai képezik a releváns értékeket.
- A \mathbf{Q} mennyiségi mátrix ezzel megegyező szerkezetű. Az ábrán a transzponált \mathbf{Q}' mátrix látható. A mátrix belsejében ábrázoltuk az elemenként képzett számtani és mértani középérték vektorokat, amelyek a Marshall-Edgeworth-, illetve a Walsh-árindexek képzéséhez szükségesek. Természetesen ezen középértékvektorok nem az eredeti \mathbf{Q} mátrix részei. Láthatóak a Laspeyres-, Paasche-, és a Fisher-indexek képzési szabályai is.
- Mindezekkel szemben az ábra jobb oldalán látható az az árindex, amelyet ma a legszélesebb körben használnak, és általában Laspeyres-típusú vagy Lowe-indexként tartanak nyilván (képzési módja miatt *infra-Laspeyresnek* nevezzük az ábrán). Ekkor nem kell ismernünk a \mathbf{Q} mennyiségi mátrixot, elegendő egy \mathbf{q} mennyiségi vektor, amely valamely régebbi időponthoz tartozik, illetve valamely korábbi év mennyiségi oszlopvektorainak az átlaga –elméletileg más opciók is lehetségesek, de azon esetekre a dolgozat keretein belül nem térünk ki, mivel valós példát rá nem találtunk a dolgozat megírásáig; amennyiben létezik is, elhanyagolhatónak tekinthetjük fontosságát gazdasági szempontból–.

Ezt a tényt ábrázolja a \mathbf{P} mátrixhoz szaggatott vonallal hozzárajzolt további rész, amely a képzett mennyiségi vektornak megfelelő régebbi árvektort jelezi. (A régi árvektort nem használjuk.) Ezen indexképzés használhatósága azon alapul, hogy a \mathbf{q} mennyiségi vektorok – legalábbis évenkénti periodicitással – egymáshoz nagyon hasonlóak, a változékonyságuk csekély. (Amennyiben ez nem teljesül, az eredmény

kevésbé lesz releváns.)

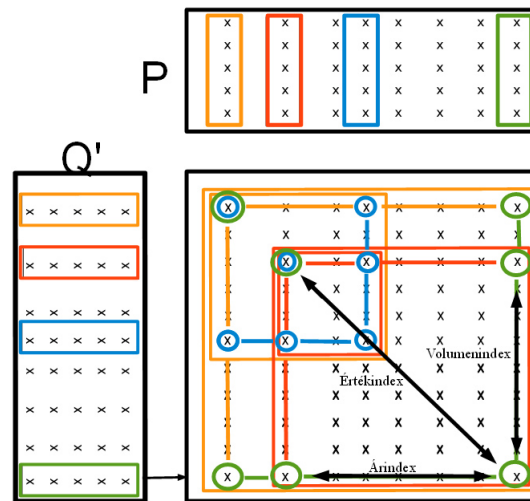
4.2.2. Megjegyzés. *EU-s szabvány alapján hazánk az EU-tagországokkal egyetemben 2 évvel a tárgyév előtti mennyiségi adatokon alapuló súlyozást használ (KSH,2020). A KSH honlapján nyilvánosan megtekinthető az árindexképzés módszertana, illetve az EUROSTAT honlapján megtalálható az IMF kézikönyv is a kiigazítás módszereiről(KSH,EUROSTAT,2020). Ezekkel csak létezési szinten foglalkoztunk a teljes kép kapcsán; nem kiigazítási, hanem transzformációs eljárás révén a 2d-szelektor eljárás sincs velük rokonságban. Egyedül az átfogó kép miatt jeleztük. Mindkettő publikus, szerepel az irodalomjegyzékben. A 2020-as reprezentáns lista szintén megtekinthető. A dolgozat csak magas szintű, EU-szabvány szerinti aggregátumokat használ (COICOP12), mely az EUROSTAT hivatalos, publikus honlapjáról letöltött (EUROSTAT,-2020).*

4.2.3. Megjegyzés. *A mátrix alapú szemléletmód árindexek terén nem különösebben elterjedt. Bár maga az értékmátrix, mennyiségi mátrix és ármátrix közismert, a mátrixokra jellemző összefüggéseket és műveleteket ritkán alkalmazzák. A vektor szemlélet kicsit gyakoribb, de a mélyebb vektor-műveletek és geometriai ábrázolás, reprezentációk szintén nem elterjedtek a "gazdasági értelem" nem feltétlenül egyértelműnek tekintett esete miatt. Emiatt a dolgozat ábrái, összefoglalásai, matematikai összefüggései szintén saját alkotások. Úgy éreztük a később bemutatott elméletek megértéséhez szükséges kitisztázásuk, megfogalmazásuk mind matematikai, mind gazdasági szempontból, illetve értelmezésmódjuk körbejárása. Az ábrákon megtekinthető, hogy mi a Laspeyres és Laspeyres-típusú-, más néven Lowe, esetenként infra-Laspeyres-index közötti nagy különbség, s hogyan illeszkedik bele az egyetemeken tanított elméletekbe a gyakorlatban alkalmazott hivatalos módszer (KSH,2020). (Ez egy általános félreértés alapja, így lényegesnek tartottuk az ábrán szemléltetést.) A speciális, gazdasági szempontból értelmesnek tekintett és általános esetek közti különbségekre is kitérünk; s így válik láthatóvá a szög-koncepció, amely igazán jól magyarázza a folyamatot –általában 2 fokot fordul/mozdul el, a Covid-kapcsán 25 fok nagyságrendileg az elfordulás így elég jelentős. Vetület szinten –árindexek–viszont pont emiatt nem lényeges az eltérés, mégis "többet látunk". Ez a meddőár és meddőindex problémakörére, elméletének relevanciájára is rámutat (Olexó,2020) a felelős dimenziók elmélete mellett. Az előbbiek szintén a Covid-hatás vizsgálat kapcsán bukkantak fel, így tudomásunk szerint nem voltak használatosak eddig. A szög-koncepciót egyedül egy feltételezhetően satíráként íródott (mégis bölcs, és lényegbe látó gondolatokat is tartalmazó), s ugyancsak feltételezhetően nem létező szerző cikkében találtuk meg ezeken a dolgozatokon kívül (Xi,2006), de definiálásán kívül ezen szerző sem használta, tartotta értelmesnek cikkében. Mégis*

a Covid és 2d-szelektor eljárás kapcsán megfigyelhető, hogy valós értelme van a hatásvizsgálatkor. A koronavírus hatását mátrixos megközelítés nélkül nem igazán lehetett volna jól vizsgálni, s az operációkutatás, lineáris algebra, statisztika és geometria is emiatt jelenhetett egyszerre meg. Gazdasági survey-jellegű dolgozatnak tekinthető -bár nem szakirodalmat, révé, hogy a munka kezdetekor még nem igazán létezett a Covid-kapcsán, hanem főként saját munkát, eredményeket, gondolatokat mutat be, abból szemezget-. Régi alapművekből, s főleg Cavallo (Cavallo, 2020), és Diewert (Diewert, 2020) cikkéből ötletet merítő, de pontos egyezést nem mutató dolgozat készült, így a forrás idézés is ennek megfelelő. A szemléletmód különböző, a konklúzió, problémafelvetés is teljesen más típusú. A témában írt más, a szerző tollából származó dolgozatok koncepciókban más szemléletűek, s minden hasonló fejezethez találhatók új eredmények, így tökéletes egyezés ott sem áll fenn -semelyik részegységre- (Olexó, 2020).

4.3. Az n-dimenziós árindex képzés bemutatása az értékmátrixból kinyert adatokkal

Az értékmátrix mélye:



4.4. ábra. Értékmátrix alapján értékindex, volumen index és árindex képzése

Az ábra megmutatja, hogy a P ármátrix és Q' mennyiségi mátrixból képezett értékmátrix elemeiből hogyan képezhetünk indexeket.

Szabályok:

1. Minden két, egy sorban álló értékpárból képezhető árindex.
2. Minden két, egy oszlopban álló értékpárból képezhető volumenindex.
3. A főátló bármely két eleméből képezhető értékindex.

4.3.1. Megjegyzés. *A mennyiségi mátrix és a súlyok közt az a különbség, hogy a súlyok árindex képzésére alkalmasak, de volumen index képzésére nem mivel 100-ra le vannak normálva (1-es norma). Volumenindexek képzésére valódi mennyiségekre van szükség.*

5. fejezet

Az árindexképzés problémái

5.1. Láncindexek additivitási problémája: Egy összetett feladat az SNA'93-beli numerikus példa nyomán

Az itt bemutatott példa a láncolt indexképzés additivitási problémáira hívja fel a figyelmet. A példa az SNA'93-as továbbfejlesztése. Az eredeti SNA'93-ashoz képest az adatok egyszerűbbek lettek, hogy a lényeg, problémakör jobban láthatóvá váljon.

A vetítési szögek növelésével a torzítás szintén nyilvánvalóbbá vált.

5.1.1. Megjegyzés. *A példa egyszerűsítéséhez a Julia programnyelvet használtuk részlet számításokra, „szép számok” keresésére. A példát Excel táblában mutatjuk be a matematikai képletek, kézi számítás és levezetés mellett.*

5.1.2. Példa. *A módosított SNA '93 példa bemutatása pontokra bontva:*

1. Jelölésrendszer:

Az eddig megszokott jelölésrendszer nem változott (\mathbf{P} : ár mátrix, \mathbf{Q} : mennyiségi mátrix (súlyok), t_n , ahol $n = 1, 2, \dots, k$: időpontok).

2. Számításhoz szükséges struktúra előállítása:

*A t_0, t_1 és t_2 időpontokban felvett adatokat \mathbf{Q} és \mathbf{P} mátrixokba rendezzük (táblázat bal oldala), majd a mátrixokat összeszorozzuk (a matematikai definíció szerint elfogadott módon): $\mathbf{V} = \mathbf{Q}' * \mathbf{P}$ (táblázat jobb oldala).*

5.1.3. Megjegyzés. *A mátrix indexelése itt –a matematikai konvencióktól eltérően– 0-val kezdődik, megfigyelve a téma szokásos jelöléseinek (t_0, t_1, t_2 idők, q_0, q_1, q_2 mennyiségek, p_0, p_1, p_2 árak).*

3. *V mátrix elemeinek kiszámítása:*

$$v_{00} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = 10 + 7 = 17$$

$$v_{10} = \begin{bmatrix} 6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = 30 + 9 = 39$$

$$v_{20} = \begin{bmatrix} 17 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 85 \\ 8 \end{bmatrix} = 30 + 9 = 93$$

$$v_{01} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 10 \end{bmatrix} = 18 + 70 = 88$$

$$v_{11} = \begin{bmatrix} 6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 10 \end{bmatrix} = 30 + 9 = 144$$

$$v_{21} = \begin{bmatrix} 17 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 10 \end{bmatrix} = 30 + 9 = 233$$

$$v_{02} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix} = 14 + 63 = 77$$

$$v_{12} = \begin{bmatrix} 6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix} = 42 + 81 = 123$$

$$v_{22} = \begin{bmatrix} 17 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix} = 119 + 72 = 191$$

4. *Alapindexek kiszámítása a V mátrixból, elvei:*

- *A V mátrix létrejöttével minden alapindex könnyen kiszámítható a mátrix két értékének hányadosaként.*
- *Bármely két egy sorban álló érték hányadosaként árindex és két egy oszlopban álló érték hányadosaként volumenindex jön létre.*
- *A hányadosok képzésénél a nagyobb indexű elem –a jobbra vagy lejjebb álló– áll a számlálóban. A főátlóbeli elemek hányadosaként értékindexek képződnek.*

5. *SNA '93 feladat kiszámítása a fenti, egyszerűbb számokkal Excelben:*

Láncindexek additivitása SNA'93 numerikus példa nyomán									
T0	q0	p0	T1	q1	p1	T2	q2	p2	
A	2	5	A	6	9	A	17	7	
B	7	1	B	9	10	B	8	9	
									P=
									5 9 7
									1 10 9
				q0	q1	q2			
				2	6	17			
				7	9	8			
Q=							p0	p1	p2
							5	9	7
							1	10	9
							2	7	
							6	9	
							17	8	
							V=		
							17 88 77		
							39 144 123		
							93 233 191		
Volumenindex									
Laspeyres fix bázis			láncolt Laspeyres			láncolt Paasche			Volumenindex
V=	17	88	77	V=	17	88	77	0-1	2,29 1,64 1,60
	39	144	123		39	144	123	1-2	2,38 1,62 1,55
	93	233	191		93	233	191	0-2	5,47 2,65 2,48
Árindex									
Laspeyres fix bázis			láncolt Laspeyres			láncolt Paasche			Árindex
V=	17	88	77	V=	17	88	77	0-1	5,18 0,88 4,53
	39	144	123		39	144	123	1-2	3,69 0,85 3,15
	93	233	191		93	233	191	0-2	2,51 0,82 2,05

5.1. ábra. Láncindexek additivitási problémája. SNA'93 példa nyomán.

6. SNA'93 feladat Excel táblájának értelmezése:

A fenti ábra alsó részén a már meghatározott értékmátrix elemei közül a pirossal bekeretezett elemek vesznek részt az adott index meghatározásában. A hányadosképzés eredményei az ábra jobb alsó sarkában található két mátrixból olvashatóak ki.

7. SNA'93 feladat kiszámított indexei táblázatban összefoglalva:

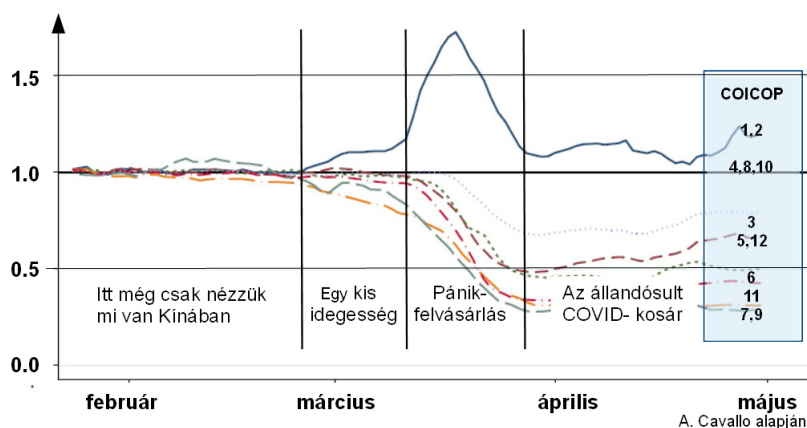
	Laspeyres fix bázis	Láncolt Laspeyres	Láncolt Paasche
volumen index	$I_{vol} = \frac{93}{17} = 5.47$	$I_{vol} = \frac{39}{17} \frac{233}{144} = 2.29 \cdot 1.62 = 3.71$	$I_{vol} = \frac{144}{88} \frac{191}{123} = 1.64 \cdot 1.55 = 2.54$
árindex	$I_{ár} = \frac{77}{17} = 4.53$	$I_{ár} = \frac{88}{17} \frac{123}{144} = 5.18 \cdot 0.88 = 4.56$	$I_{ár} = \frac{144}{39} \frac{191}{233} = 3.69 \cdot 0.82 = 3.03$

5.2. ábra. SNA'93 módosított változat; indexek kiszámítása konkrét értékekre

6. fejezet

A Covid-19 járvány hatásainak vizsgálata

6.1. Fogyasztási szokások elemzése a koronavírus tükrében



6.1. ábra. A koronavírus első hullámának hatása a COICOP főcsoportokra, vásárlási szokásokra

A fenti ábrán látható, hogy a Covid-19 járvány első hulláma –avagy az annak tekintett periódus–, és az emiatt bevezetett korlátozó intézkedések hogyan változtatták meg a megszokottan nagyrészt állandó, s általában közgazdaságilag enyhe, többnyire pozitív változást feltételező fogyasztási szokásokat (a közgazdasági tételek igazsága is gyakran múlik azon, teljesül-e az említett feltevés). A járvány a fogyasztás majdnem minden szektorát visszavetette, kivéve az élelmiszereket és szeszes italokat, amelyekből március

második felében jelentős túlvásárlás volt, s azután egy kisebb többleten állandósult. Az alábbi ábra az USA adatait mutatja, s Cavallo ábrájának továbbfejlesztése feliratokkal, magyarázatokkal, időszak meghatározásokkal, aki a Covid-hatást „heurisztikusan” elemezte, s új súlyokat alkotott meg Diewert javaslatainak figyelembe vételével (Cavallo,2020). A Cavallo által bevezetett Covid-súlyokat, más néven Cavallo-szorzókat alkalmaztuk a 2-d szelektor eljárás segítségével a Covid-hatás vizsgálatára, szögelfordulás meghatározására.

6.1.1. Megjegyzés. *Érdemes megfigyelni a fogyasztást gazdasági, s a mozgást indukáló viselkedésmód szerinti aspektusban is 2020. február és 2020 május közt a 12 COICOP főcsoportra, ami a fenti ábrán feliratok formájában látható. Ez lényeges különbség az eredeti Cavallo ábrához képest, melyet cikkében közöl (Cavallo,2020). Cavallo azóta a 2. hullám elejét is ábrázolta, vizsgálta, de mivel abban benne vagyunk, egyelőre konklúziók nem igazán vonhatók le. Mégis érdemesnek tartottuk jelezni a téma iránt érdeklődőknek. Cavallo "heurisztikus", "szakértői" módszereket alkalmaz cikkeiben, illetve hagyományos ábrázolásmódot. Az ábraötletek a továbbiakban nem kötődnek hozzá, csak a kiszámított súlyaihoz, amiket saját megfontolás szerint alkalmaztunk automatizált módszer, ábrázolásmód kifejeztéséhez, s matematikai, számszerű vizsgálatokhoz, megfigyelésekhez, gazdasági tétel teljesülés, matematikai és gazdasági tételfogalom különbségének vizsgálatához is többek között. Az utóbbiakat nem ez a dolgozat, hanem az irodalomjegyzékben jelölt két másik dolgozat tartalmazza (Olexó,2020). Emellett így megvizsgálható volt az is, milyen problémákat okoz a Covid, s mik álltak fenn már ezelőtt, csak kumuláció okán hirtelen feltűnőbb lett, esetenként egyszerűen az érdeklődési-fok lett magasabb irányukban.*

6.2. Szemezgetés a vásárlási szokások részleteiből, az árindexképzés mélyéről, "gazdasági valóságból"

A fogyasztói kosár jelentősen megváltozott a koronavírus miatt. Egyrészt a megszorítások egyes kategóriákat majdnem teljesen megszüntettek időszakosan (pl. utazás, vendéglátás), másrészt az emberek prioritása is megváltozott, s pánikvásárlás alakult ki egyes termékek (főként élelmiszerek) esetén. A munkakörülmény változás, s a távmunka bevezetése pedig más tartós cikkek piacát (főként az informatikáét) is fellendítette. Néhány alapesetben nem mérhető iparcikk is átjutott a szignifikancia szinten (webkamera, varrógép, kézfertőtlenítő, szájmaszk stb.), míg mások elenyésztek (főként a színház, hotel és repülő jegyek, melyeknél majdnem egyedülállóan tendenciózus növekedést lehet megfigyelni „véletlen bolyongás” helyett a 12 csoportban árindex szempontjából –ez a növekedés esett a koronavírus

miatt enyhén szólva vissza). Az alapvető tendenciákat, s hiányukat a dolgozat elején vizsgáltuk. A negatív nyersolaj árak szerencsére a fogyasztók részéről nem igazán voltak érzékelhetők – főként a tárolók hiánya, túlzott olajkibocsátás, határzárak miatti utazási korlátozások, és repülő leállás okán alakult ki –, maximum az olcsóbb üzemanyag árak révén, melyet kevesen bánnak. Nagyobb probléma, hogy alapesetben a negatív árak sem értelmezhetők közgazdasági szempontból, s létezésüket, s a rájuk releváns módszertanok szükségességét nem igazán fogadják el széles körben (akkor sem, hogyha egyértelmű bizonyíték van rá). Így látható, hogy erre az időszakra az „általában jó” megközelítés nem opció amennyiben szeretnénk, hogy a végeredmény üzenjen is valamit. (Az üzenet hiányán kívül viszont nagyon stabil, általános esetben bizonyítottan jó, s technikai és szabályzati szempontból tökéletes értékeink lesznek.) Ezen problémák megoldására vetette fel Diewert, hogy valamilyen új, aktuális kosarat kellene mérni (pl. web-scrapinggel, vagy NAV-szerű számla adatokon alapuló módszerrel) a hagyományos, 2 évvel ezelőtti súly helyett, mivel a célfüggvény –inkább „túlélési függvény” jelen esetben, amely a célfüggvény nagyon erős torzulásával jön létre –, kereslet-kínálati görbe, illetve helyettesítési függvény is teljesen megváltozott. Míg "rendes" –a Covid- , "túl szabályozás"-, és háború-mentes időszakot értjük ez alatt – időszakban a krumplit téstával, s a barna rizst fehérrel nem helyettesítjük, ilyenkor míg kapható valamilyen tészta, zöldség, fejfájás csillapító, megvesszük, így teljesen más elven működik a helyettesítés, "termék csere" az emberek, s a módszertanok szintjén, mivel a "megőrlés" nincs bekalkulálva —nem is lehet. A minőség kérdése is nagyon megváltozott. Emiatt a közgazdasági kiigazítási módszerek sem hoztak feltétlenül a köznép számára releváns eredményt, ugyanis a romló minőség drágulása közgazdasági alapfeltevésekkel ellenzök. Pedig pont ezt mutatták példának okáért a laptopok, ahol az 1 GHz-es Intel Pentium processzor annyiba került, mint az i5 2 GHz múlt évben. Az i7-ről pedig ne is beszéljünk. Az amúgy sem volt igazán kapható –ugyanis az Intel jelenleg komoly problémákkal küszködik. Olyan irányban rohamoz, ahol sok babérja nem terem, s a megváltozott piacra jelen helyzetben nem úgy látszik, hogy új üzletpolitikával reagálna –amely a nagyok közt megmaradáshoz szükséges komponens lenne szakértők tömegei szerint–. Ezzel egyetemben a használt laptopok is két kategóriába oszlottak: van-e beépített webkamerája, vagy nincs, s az árat ez sokkal jobban meghatározta, mint a márka, konfiguráció. (Viszont közgazdasági okokból a használt piac csak nagyon ritka esetekben szól bele az árindexbe, alapvetően nem tekinthető „fogyasztásnak”, így a használt cikkek keresletével kapcsolatos gondolatoknak nem ez a dolgozat ad teret.)

6.2.1. Megjegyzés. *A számítás és kiigazítás hivatalos módszereinek egy részét az IMF honlapján megtalálható kézikönyv tartalmazza (IMF,2020), amely bárki számára publikusan elérhető. Ez csak egy univerzális módszergyűjtemény, semmi konkrétumot nem tartalmaz az országokra nézve, s kijelentésünk is főként matematikai vizsgálaton alapul általános megfontolásokkal a könyvbeli módszereket vizsgálva egyedül az alsóbb szintek*

kapcsán (amit az árindexek képzése fejezetben lévő ábra mutat be).

7. fejezet

Árindexképzés Covid-időkben

Visszatérve az alap kosár problémájához, Diewert cikke alapján az új Covid-súlyokat Cavallo mérte meg a 12 kategóriás COICOP felosztásra. Ez a felosztás az EU-n belül univerzális. Országspecifikusan hazánkban 7 csoportba soroljuk a termékeket. (A COICOP, és az országspecifikus felosztással kapott indexek megtalálhatók a KSH, és EUROSTAT honlapján különböző bázisokkal.) Ezen adatokat felhasználva dolgoztunk tovább, fejlesztettük ki az automatizált 2d-szelektor transzformációt, Covid-kosárszög, szögelfordulás koncepciót, számítottunk ki indexeket, fejlesztettünk ki egyéb ábrázolásmódokat az események megvilágítására, s többek között kimondjuk a Laspayes-Paasche-váltótételt geometriai megközelítésben. Az algoritmus gyökere a bázis transzformáció, 2 dimenzióba leképezés. A transzformáció –mivel erre az időszakra lett kifejlesztve– a Covid-időkre sokatmondó. Eredményeinket be is mutatjuk valós, EU-s adatokra végigszámolva, polár-koordinátáson ábrázolva a tagországok mindegyikére, így a szögek, viselkedésmódok könnyen, szemmel is összehasonlíthatók.

7.0.1. Megjegyzés. *A dolgozatban bemutatott ábrák többnyire a 2d-szelektor 6.4 verziójára vonatkoznak. Az újabb verziók eredményei fejlesztés okán enyhén változtak további matematikailag előnyös tulajdonságok bekerülése miatt; a fejlesztés útját, kisebb célokat, igényeket a Mi történt veletek kedves árak?: 2d-szelektor eljárás a koronavírus árnyékában című dolgozatunkban részletezzük (Olexó,2020).*

Az eljárás nagyon enyhe Covid-típusú eltérésre is érzékeny, a szorzófaktorok kis hatványaival is jól működik. A szögek lényegében nem változnak, a tendenciák megfigyelhetők, s a szögtípusok szintén – ezt az állítást empirikusan egy későbbi fejezetben igazoljuk adat alapúan. A Covid- és nem Covid-típusú adatokat is könnyen szétválaszthatjuk vele (signum avagy előjel függvény segítségével).

Az alábbi táblázat mutatja, hogy Cavallo az egyes COICOP kategóriákban milyen forgalmi eltéréseket tapasztalt (Cavallo,2020). Ezek alapján az aktuális fogyasztói kosár tételeit az eltéréseknek megfelelő szorzóval kiigazítva egy Covid-időnek megfelelő fogyasztói kosarat állított elő. Feltételezve, hogy a hasonló kényszerintézkedések más országokban is hasonló változásokkal járnak, ugyanezen szorzótényezőket alkalmazta még 16 másik ország esetében is. A táblázat alsó három sorában az eljárás a 2020-as magyar Covid-kosarat számítja ki és normalizálja.

COICOP kategória	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
forgalom+[%]	12,32	12,32	-41	0	-26,8	-52,2	-70,1	0	-71,1	0	-61,9	-26,8
szorzótényező (λ)	1,12	1,12	0,59	1,00	0,73	0,48	0,30	1,00	0,29	1,00	0,38	0,73
Magyar cpi súly '20	21,54	8,27	3,62	12,10	5,55	5,48	15,11	3,94	7,26	1,88	8,36	6,90
cpi-súly*szorzó	24,19	9,29	2,13	12,10	4,06	2,62	4,52	3,94	2,10	1,88	3,19	5,05
normalizált COV-súly	32,23	12,37	2,84	16,11	5,41	3,49	6,03	5,25	2,79	2,50	4,25	6,73

7.1. ábra. A Cavallo-szorzófaktorok, COICOP-súlyok a Covid-időszakra

Fogalmazzuk ezt meg pontosabban:

$$\text{Ha } q = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_{12} \end{bmatrix} \text{ az aktuális fogyasztói kosár, és } \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \lambda_{12} \end{bmatrix} \text{ diagonál mátrix}$$

a korrekciós szorzótényezőket tartalmazza, akkor a

$$\Lambda q = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \lambda_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 q_1 \\ \vdots \\ \lambda_{12} q_{12} \end{bmatrix}$$

művelet eredménye a módosított fogyasztói kosár.

A cikk alapján Magyarországra az alábbi táblázatban megtekinthető eredményekhez jutottunk (számítógép segítségével kiszámítva).

A késsel keretezett táblarészek ár-, vagy árindex-adatok, a zölddel keretezettek kosáradatok. Az árucsoportok közül pirossal színezettek súlya a Covid-járvány időszakában nőtt, a késsel színezettek pedig csökkent. (Ezen az ábrán még 3 kategória van, mely empirikus részletet, megfigyelést is feltételez, emiatt később 2 részre osztottuk, s vizsgáltuk melyik komponensben mennyire tartozik egy ország. Viszont

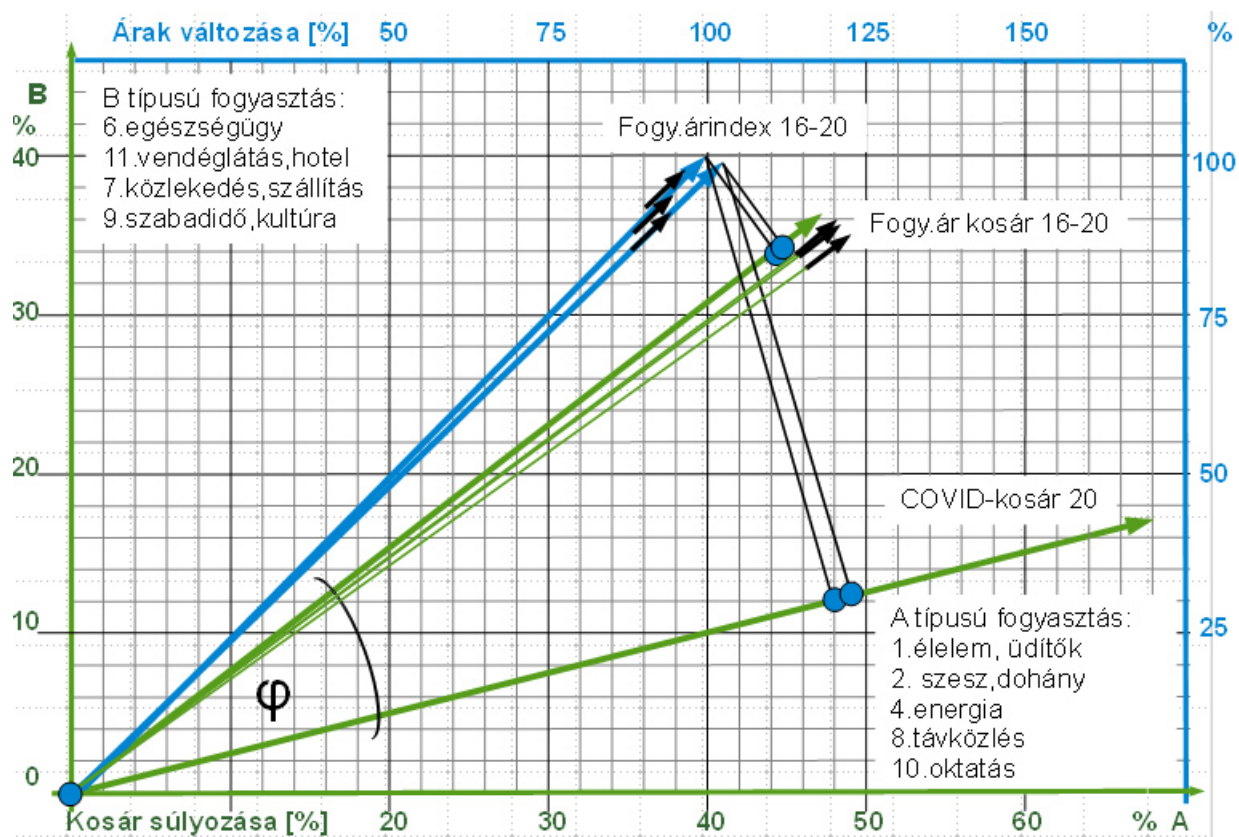
kiindulási, értelmezhetőségi szempontból lényeges jelezniük, hogy mely ágazatok voltak „semlegesek” az időszakban –az emberi agyból is kiesett valószínűleg a létezésükkel és áráikkal kapcsolatos gondolat tömeg –ellentétben példának okáért az élelmiszerekkel).

Kezdeti "heurisztikusabb" 3 részre bontó módszer Magyarország 2020.04; Covid:

Magyarország				c*e[%]	f/f15[%]	d*e[%]	d*g[%]
coicop	Cav-fakt	infl. ráta	cpi súly	cov-súly	norm.cov	covid-cpi	
1. Élelmiszerek	12,32	1,123	1,6	21,19	23,80	32,20	3,39
2. Szesz, dohány	12,32	1,123	0,8	8,59	9,65	13,05	0,69
3. Ruha, cipő	-41,04	0,590	1,4	4,22	2,49	3,37	0,59
4. Energiák stb.	0	1,000	-0,1	10,45	10,45	14,14	-0,10
5. Lakáskarbantartás	-26,79	0,732	-0,1	5,38	3,94	5,33	-0,05
6. Egészségügy	-52,18	0,478	-0,1	4,92	2,35	3,18	-0,05
7. Közlekedés, szállít.	-70,05	0,300	-7,3	14,8	4,43	6,00	-10,80
8. Távközlés	0	1,000	-0,1	3,71	3,71	5,02	-0,04
9. Szabadidő, kultúra	-71,14	0,289	-0,3	7,13	2,06	2,78	-0,21
10. Oktatás	0	1,000	-0,2	1,8	1,80	2,44	-0,04
11. Vendéglátás, hotel	-61,86	0,381	1	10,87	4,15	5,61	1,09
12. Egyéb	-26,79	0,732	0,2	6,94	5,08	6,87	0,14
			Σ=	73,91			-5,40
növekvők	1,0	2,00	45,74	49,41	66,85	3,90	5,96
semlegesek	0,2	1,50	16,54	11,51	15,57	0,68	0,56
csökkenők	-1,7	-6,70	37,72	12,99	17,58	-9,88	-3,93
vektor szöge	-60,7	-73,4	39,5	14,7	14,7	-68,7	-35,4

7.2. ábra. Számítások: Magyarország COICOP12 2020.04; Covid-időszak

Az A-B árucsoportok függvényében ábrázolva a Covid-kosarat az alábbi ábrát kapjuk:



7.3. ábra. Kosárszög: Magyarország COICOP12 2020.04; Covid-időszak

Cavallo összesen 16 országnak a fogyasztói kosarát vizsgálta cikkében, számolta ki értékeiket. Sajnos az USA kosara nem COICOP főcsoportok szerint van, így összehasonlítása problémás az egységes rendszer szerint számított adatokéval.

17 ország Kosár-szögei:

COICOP	FR	HU	GER	UK	NL	URU	ARG	TUR	IT	CAN	BR	CHILE	GR	IR	JAP	D-K	SP
Normál kosár A-B szöge																	
A[1,2,4,8,10]	39,6	47,73	44,84	33,5	38,64	50,53	48,96	55,03	36,4	46,05	38,52	49,29	41,96	35,82	58,76	43,71	43,39
[3,5,12]	22,78	16,07	19,29	21,8	23,14	17,43	24,78	24,64	25,98	19,68	23,37	18,66	14,72	17,88	15,2	19,34	20,05
B [6,7,9,11]	37,61	36,21	39,85	46	38,11	32,03	18,11	35,16	37,55	33,97	38,11	32,04	43,32	46,29	25,88	36,42	39,7
szög:	43,52	37,19	41,63	53,94	44,61	32,37	20,30	32,58	45,89	36,42	44,69	33,03	45,91	52,27	23,77	39,80	42,46
COVID kosár A-B szöge																	
A[1,2,4,8,10]	59,53	68,46	63,78	53,89	58,84	69,76	69,03	66,84	55,89	65,77	58,06	68,39	63,86	56,93	75,89	63,48	62,73
[3,5,12]	22,59	14,98	18,21	23,04	23,14	15,42	22,37	19,44	25,54	18,89	23,27	17,11	14,41	18,50	13,03	18,37	18,70
B [6,7,9,11]	17,88	16,55	18,01	23,07	18,03	14,82	8,60	13,72	18,57	15,34	18,67	14,50	21,73	24,57	11,08	18,15	18,57
szög:	16,72	13,59	15,77	23,18	17,04	12,00	7,10	11,60	18,38	13,13	17,83	11,97	18,79	23,34	8,31	15,96	16,49
Δszög:	26,80	23,59	25,86	30,76	27,57	20,38	13,20	20,98	27,52	23,28	26,86	21,06	27,12	28,93	15,47	23,84	25,97
Árindexek [%]:	FR	HU	GER	UK	NL	URU	ARG	TUR	IT	CAN	BR	CHILE	GR	IR	JAP	D-K	SP
Laspeyres	-0,09	0,93	0,65	0,12	1,15	2,29	1,41	0,46	0,01	-0,47	-0,25	0,08	-0,16	-0,29	-0,20	-0,68	-0,26
Paasche	0,15	2,52	0,53	0,01	0,54	3,01	1,38	0,87	-0,30	-0,23	0,29	0,23	-0,19	-0,46	-0,03	-0,51	-0,12
Fisher	0,02	1,61	0,59	0,06	0,82	2,64	1,39	0,65	-0,16	-0,36	-0,02	0,15	-0,18	-0,38	-0,12	-0,60	-0,19
Marshall-Edg	0,03	1,73	0,59	0,07	0,85	2,66	1,39	0,65	-0,15	-0,35	-0,02	0,16	-0,18	-0,37	-0,11	-0,59	-0,19
Walsh	0,04	1,81	0,58	0,06	0,82	2,70	1,39	0,69	-0,15	-0,33	0,02	0,17	-0,18	-0,38	-0,10	-0,59	-0,18

7.4. ábra. Kosár-szögek az EU 17 országára; Excelben kiszámítva

7.0.2. Megjegyzés. A fenti táblázat értékeit (Kosár-szögek 17 országra) számítógép segítségével számítottuk ki. Ezt Covid-szögnek is nevezhetjük, mivel jelen esetben pont ezt magyarázza; emiatt a dolgozatban vegyesen használjuk a két elnevezést.

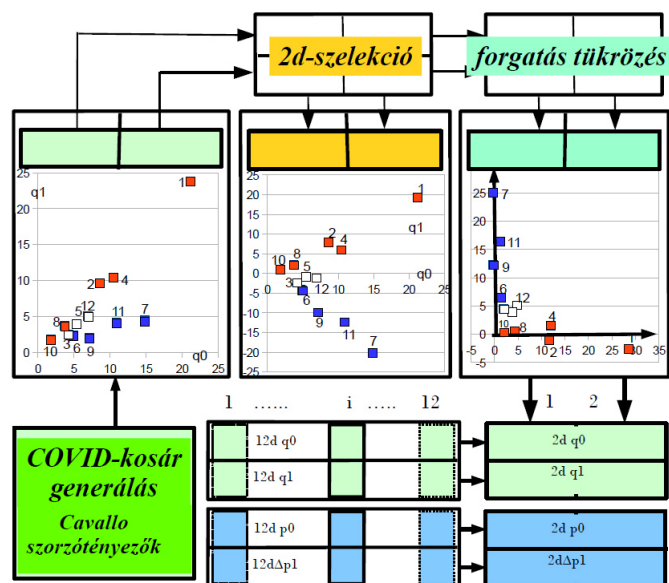
8. fejezet

A 2d-szelektor transzformáció

8.1. A 2d-szelektor eljárás működési elve nagy vonalakban

A 2d-szelektor transzformáció a fenti, heurisztikusan már körvonalazódott koncepció alapján jött létre. Technikai megvalósítása többek között Excel-el, Julia-val, OCTAVE, illetve MATLAB-al számítógéppel történt. (Alkalmazható bármely értékekre, de releváns eredményekhez valóságos/valósághű adatok szükségesek.) Mivel a dolgozat nem a technikai megvalósítás bemutatását, hanem az elvek, s folyamatok megvilágítását tűzte ki céljául, a számítás, s kódolás, esetleges numerikus problémák technikai részleteivel kapcsolatos észrevételeket, kódokat, belső „Excel-képleteket” nem mutatjuk be benne. Ugyanezen okokból az eljárást is absztraktabb, kevésbé matematikai, inkább gazdasági és folyamat szemléletű irányból mutatjuk be. (A hosszas levezetések kihagytuk belőle.) Használatának gazdasági értelmére szintén kitérünk egy következő fejezetben. Bemutatjuk az enyhe Covid-hatás, s Covid-ossági fok beépítés koncepcióját, lehetőségét, gazdasági értelmét is egy következő fejezetben. A hatványos 2d-szelektor eljárással szintén automatikusan kiszámítható eredményekhez juthatunk a hivatalos adatok, Cavallo-szorzó faktorok, illetve a később kifejtett k paraméter –ez a covid-fok, hatvány- és a 2d-szelektor eljárás segítségével.

A 2-d szelektor eljárás lépéseinek folyamatát az alábbi ábra ismerteti:



8.1. ábra. 2d-szelektor eljárás általános működési elve, lépései

A 2d-szelektor eljárás váza, fontosabb lépései:

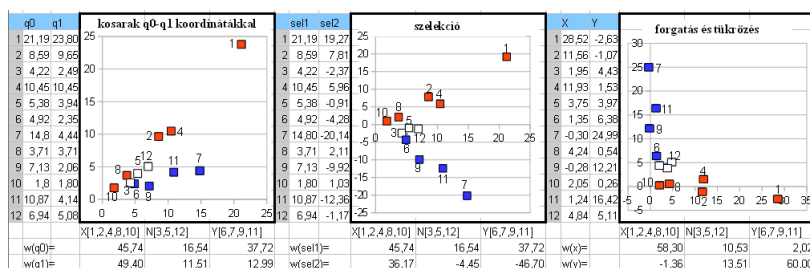
A kosarak síkján végrehajtott 2d-szelekciós művelet a pirossal, illetve kékkel jelzett árucsoportokat távolabb viszi egymástól (geometriailag szemlélve).

A forgatás-tükrözés műveletek segítségével végül a piros és kék árucsoportok egy-egy tengelyhez kötődnek, vagyis létrejönnek az X és Y árucsoportok. Az így kialakult árucsoportok transzformációs mátrixként szolgálnak és az eredeti 12-dimenziós p_0, p_1, q_0, q_1 vektorokat az x illetve y vektorokkal beszorozva előállítjuk ugyanezek 2-dimenziós képét.

Ez a kép bizonyos szempontból kevésbé pontatlan, mint a heurisztikusan kialakított árucsoportjaink, illetve "szubjektív mentes".

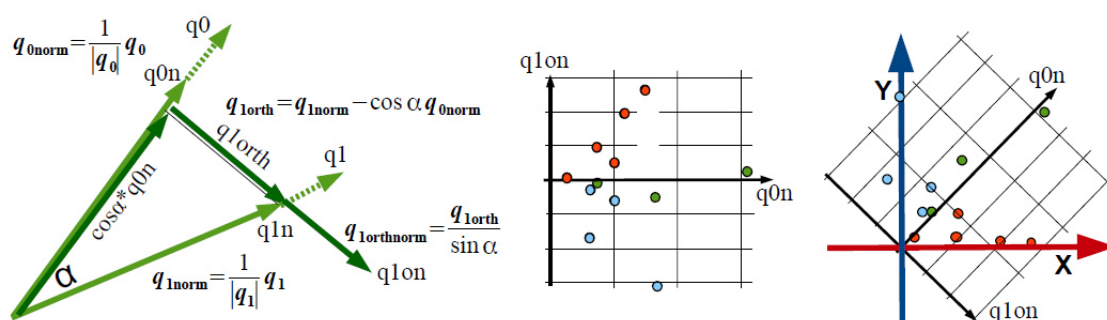
8.1.1. Megjegyzés. Matematikailag minden lépés definíció szerint optimális elméleti szinten, optimalizálási eljárásaként is tekinthetjük, ha az operációkutatás területén szeretnénk szemlélteni az algebra, statisztika, geometria helyett.

8.1.2. Megjegyzés. Az egyes kategóriák csak közelítőleg vannak rajta a koordinátatengelyen, általában erre-arra kilógnak.



8.2. ábra. 2d-szelektor eljárás alkalmazása, számítása (Magyarország, 2020.04; COICOP12)

Alapvető követelmény, hogy a 2-dimenzióba konvertált vektorok ugyanakkora árindest képezzenek, mint a 12-dimenziós eredetiek. Ennek általános próbája, annak vizsgálata, hogy a vektorokkal képzett értékmátrixok tagjai megegyeznek-e. (Az a cél, hogy megegyezzenek.) Ezek teljes egyezése garancia a transzformáció pontosságára (torzítás mentességére).



8.3. ábra. 2d-szelektor eljárás matematikája

A 2d-szelektor eljárás belsejének matematikája:

A fenti ábra a 2-d szelektor eljárás belsejének elméleti háttérét mutatja be (ortonormált bázis keresése, bázis transzformáció, leképezés).

8.2. A Cavallo szorzófaktorok (kis) hatványainak vizsgálata a kisebb COVID-hatásokra való érdeklődés kapcsán

Mivel a kezdetekben előfordultak, s később is megmaradhatnak kisebb Covid-hatások a vírus súlyossága, fertőzés sűrűség, korlátozások mértéke stb. változása miatt hipotézisünk szerint, érdemes megvizsgálni a Cavallo-szorzófaktorok tört hatványait is. Ezek a pici, de Covid-típusú hatást mutatják meg. Ellenőrző jelleggel empirikusan kicsit nagyobb hatványokat is néztünk (számítógép segítségével végezve a számításokat a szögekre, s ábrázolva az eredményt).

Eredményeinket a következő oldalon megtalálható ábra mutatja.

Az ábrán megfigyelhető, hogy míg nagyon kis változásoknál is lényegében torzításmentes marad a hatványos 2d-szelektor eljárás, $k = 5$ -nél már elkezd nagyon torzítani. (A jelenség elméleti oka az, hogy kis szögnél is a \mathbf{q}_0 vektorra merőleges \mathbf{q}_{10n} ugyan akkora lesz, mint nagyobb szögeltérések esetén, és ugyanarra fog mutatni.)

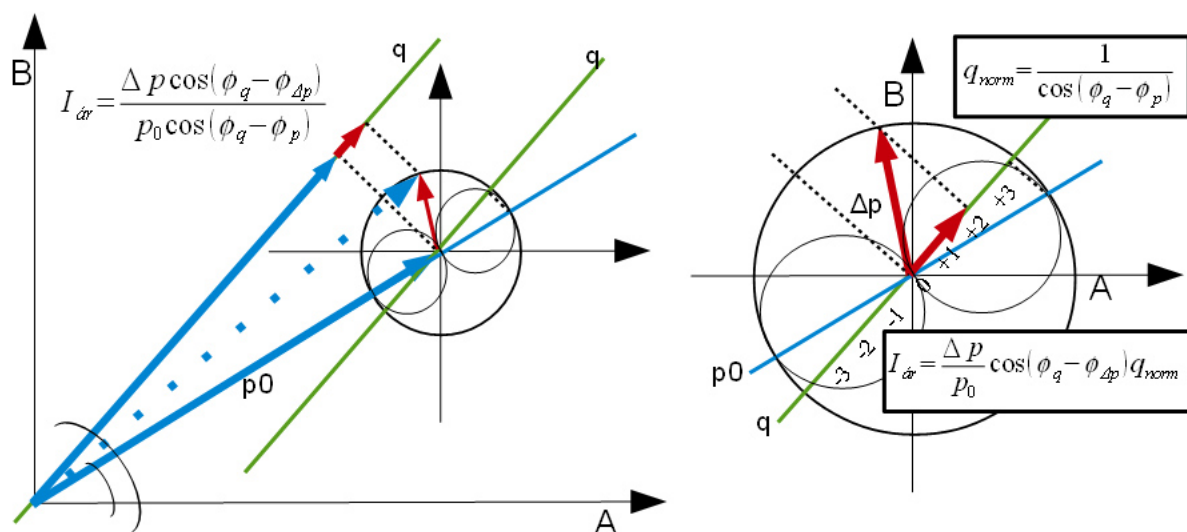
Vagyis enyhe Covid-típusú hatások figyelembe vételére, s megfigyelésére is alkalmas a 2d-szelektor eljárás, illetve a Cavallo-szorzófaktorok empirikus tapasztalatok szerint –s elméleti szinten is.

A kirajzolt grafikonon kezdetekben megfigyelhető alakzat torzulását, s annak mértékét a k paraméter megválasztása (vagyis a szorzófaktor hatványa) szerint szabad szemmel is végig kísérhetjük. Az alapadatokat és részletszámításokat az ábra tetején láthatjuk. A színek jelentése a dolgozat elején definiált maradt.

8.2.1. Megjegyzés. A 2d-szelektor eljárás, s a dolgozatban alkalmazott módszerek különböző fejlesztési fázisokban lehetnek, így enyhe eltérés előfordulhat a pl. Excel, R, MATLAB-ban kapott "hivatalos adat alapú" ábrákon. Lényeges megjegyezni, hogy a linearitás nem teljesülésének okán az árindexképzés bizonyos területeinél nem mindegy, mit miből számítunk akkor sem, ha esetleg "logikusnak tűnne" az egyezés. Ezt mutattuk be részben például az SNA93' példán. A fejlesztési fázisokat, okokat (matematikai szempontból fontos volt a torzítatlanság elérése, ami az eljárás jelenlegi verziójában már igaz; így attól függetlenül szépen szelektál-e, torzítatlan transzformációként működik, s 2 dimenziós ábrázolhatóságot, értelmezhetőséget tesz lehetővé). Az ábrázolásmódok szintén fejlődtek, összehangolódtak azóta még mélyebb szinten a gazdasági alapvetésekkel, s behelyezhetővé vált ez az eljárás is a "gazdaságilag is értelmes" kategóriába –bár valószínűleg vannak akik ezzel nem értenek egyet–. pl. a közömbösségi görbéket is tudjuk ábrázolni a kosár-szögeken –ez a közömbösségi görbe "számszerűsíthetőségét" tette szükségessé, amit kifejtünk szerkesztési móddal–, s a polár koordinátás ábrákon is cél, hogy megjelenjen. Az ábra készítés módját mélyebben a mellékletben jelölt két további dolgozat tartalmazza egyrészt gazdasági, másrészt matematikai és informatikai aspektusból szemlélve a problémakört (Olexó,2020).

8.3. Polár-koordinátás ábrázolásmód, alkalmazása a Covid-hatás, Covid-tűrés vizsgálatára az EU 27 országaira

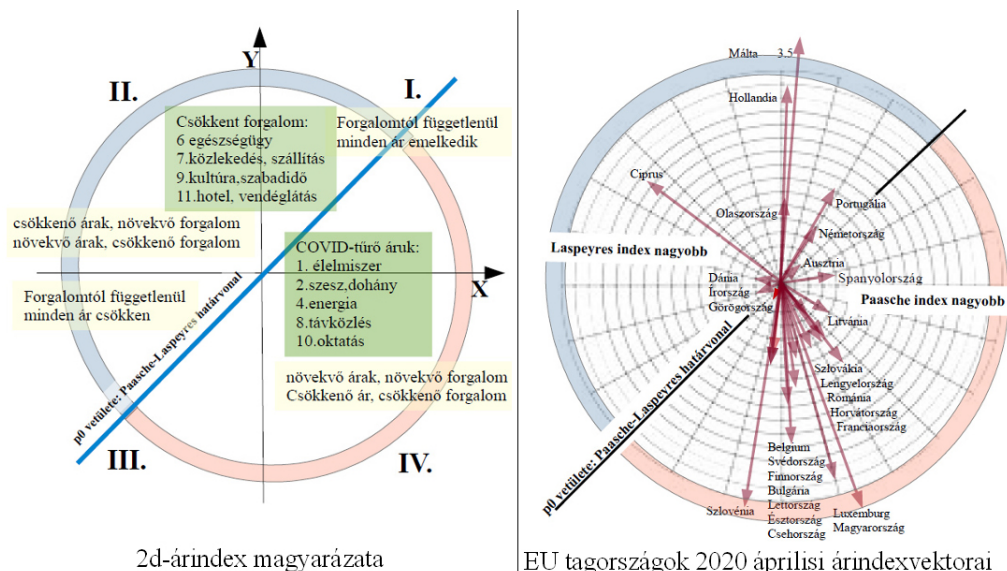
Δp_1 vetítése a teljes ábra nélkül:



8.5. ábra. Δp_1 és vetületeinek ábrázolása polárkoordinátákkal

Fogyasztói árak esetén a jelenkorban viszonylag kis változások történnek. Ha az előbb mutatott példa szerint ábrázolnánk a folyamatot, a kis méretek miatt szinte semmit sem látnánk. Ezért ebben az esetben csak a \mathbf{p}_0 -ból induló $\Delta\mathbf{p}_1$ -et ábrázoljuk és annak vetületeit a \mathbf{q} egyenesekre. Az ábrán az áttekinthetőség céljából csak egy \mathbf{q} irány látható.

Az alábbi ábra bal oldali része lényegében önmagát és a jobb oldali ábrarészt magyarázza, de talán nem elég mélyen. A 2d-szelektor transzformáció algoritmikusan tőlünk függetlenül rendezheti két csoportba a divíziókat (a 12 COICOP főcsoportot). A Cavallo-szorzótenyezők esetén ez 9 divízió esetén megfelelően illeszkedik. Három főcsoport esetén (3,5,12) valamely belső közömbös pozíciót foglal el. A $\Delta\mathbf{p}_1$ árvektort ebben a koordináta rendszerben ábrázoljuk. Az elrendezés tengelyek szerint a mennyiségi viszonyokat reprezentálja, az árviszonyokat pedig a tengelyek iránya mutatja meg. Ezek alapján a II. síknegyedben az árak és mennyiségek negatív korrelációja miatt biztosan Laspeyres-dominancia kell legyen, ezt a korrelációs feltételt már a 19. század végén is többen feljegyezték. Ugyanakkor a IV. síknegyedben (pozitív korreláció) Paasche-dominancia kell legyen. A Laspeyres-Paasche dominancia váltása a \mathbf{p}_0 vetületének vonalában történik, így az I. és III. síknegyedek középrészén van a határ. A Paasche-Laspeyres váltótétel szemléltetését és bizonyítását később taglaljuk.



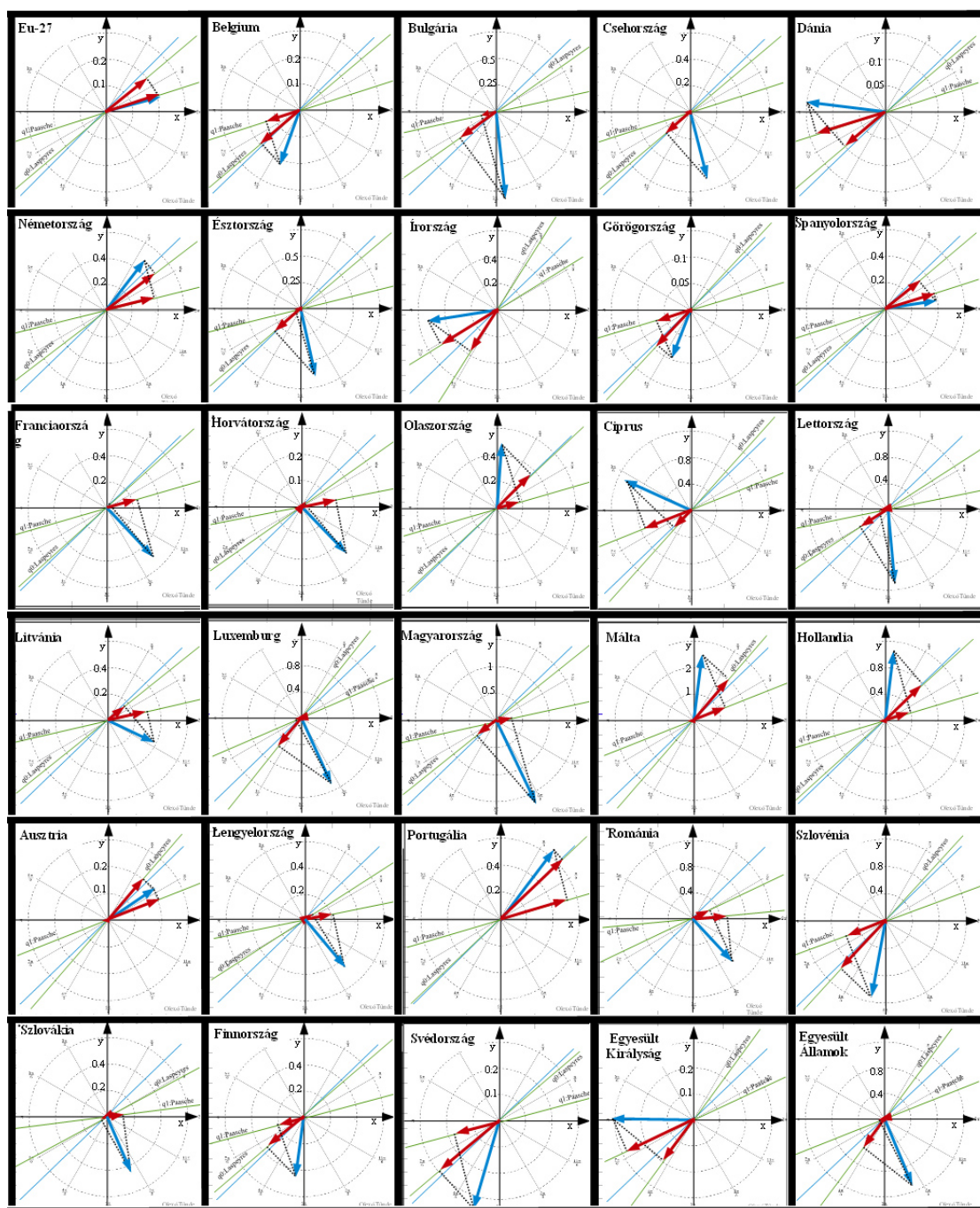
8.6. ábra. Az EU-s országok árindexeinek polár-koordinátás ábrázolása

Az ábra jobb oldalán látható ábra a Covid-időket jellemzi. A legtöbb ország a IV. síknegyedben helyezkedik el. Ez egy drasztikus változás ahhoz képest, hogy a februári árindexnél még minden ország a pozitív szögtartományban volt. Ez a 0° - 180° szögtartományt, az I. és II. síknegyedeket jelenti. Ez megfelelt a jelenlegi általánosan elfogadott közgazdasági elméleteknek, a Laspeyres-árindex nagyobb kell legyen a Pasche-árindexnél, és a feltevés a hasznossági függvény segítségével bizonyíthatónak is látszik. A Covid-idők korlátozásainak idején ez mégsem érvényesülhetett, pontosan a korlátozások miatt. Ugyanakkor az emberek fejében képződő hasznossági függvények is átalakultak és túlélési függvénnyé torzultak.

Egyszerűbb megfogalmazással a kínálati-túlkínálati piac hirtelen átalakult.

A következő ábrán az összes Uniós ország áprilisi árindexének képzését mutatjuk be. Az ábrákon a felbontás az Y tengelynél látható, és ez az érték egy koncentrikus kör mentén egyenlő. Az ábrákon a \mathbf{q}_0 , \mathbf{q}_1 vektorok helyett csak azok irányával egyező párhuzamos egyenesek láthatók, mint ahogy ez a $\Delta\mathbf{p}_1$ vetítése a teljes ábra nélkül című alfejezetben le van írva. A $\Delta\mathbf{p}_1$ vektor kék színű nyíllal lett jelölve az ábrán, s ennek vetületeit a két kosáregyenesre piros nyilakkal jelöltük. A $\Delta\mathbf{p}_1$ árvektor néhány esetben "annyira merőleges" valamelyik kosáregyenesre, hogy a képezett árindex szinte ábrázolhatatlanul kicsi. Ugyanakkor talán pont ezek az ábrák magyarázzák azt a helyzetet, hogy a közölt árindexek – amelyek általában kis értékűek – nem tükrözik a lakosság személyes tapasztalata szerinti árdrágulást.

Az EU-s tagországok árindexeinek polár-koordinátás ábrázolása a Covid-hatás vizsgálatának, illetve a Laspeyres-Paasche viszony feltérképezésének céljából:



8.7. ábra. Covid-hatás vizsgálata EU-s országok árindexein (2020.04); polár-koordinátás ábrázolás

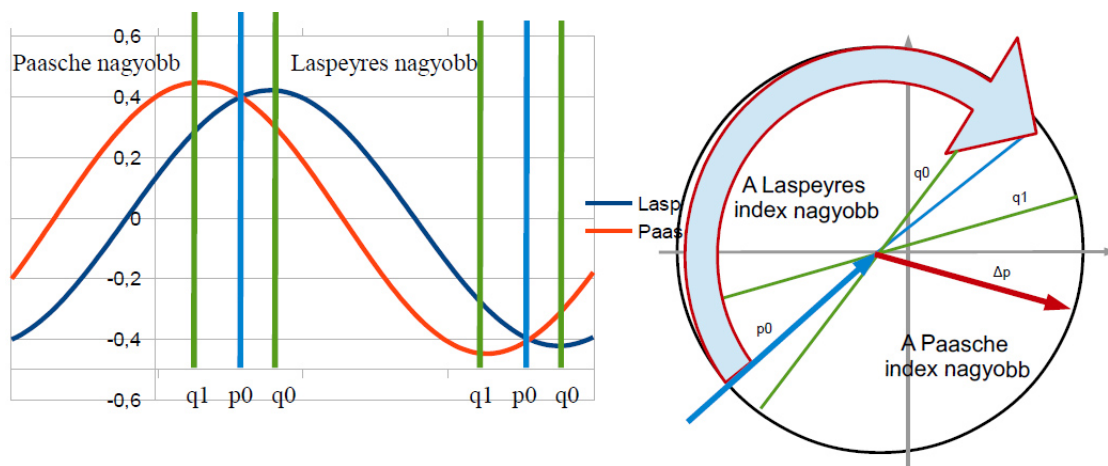
8.3.1. Megjegyzés. Az ábrázolásmód további fejlesztése, változata, készítési módja megtalálható a további dolgozatainkban (közömbösségi görbékkel is) (Olexó,2020).

8.4. A Paasche-Laspeyres váltótétel (Paasche-Laspeyres revolving theorem)

Először a Laspeyres-Paasche váltótétel 2-dimenziós esetét szemléltetjük, majd azt általánosítjuk n -dimenzióra.

8.4.1. A Paasche-Laspeyres váltótétel 2-dimenziós esete

A 2d-szelektor transzformációval képzett síkon szemléletesen jeleníthető meg a Paasche-Laspeyres váltótétel speciális esete.



8.8. ábra. Laspeyres-Paasche váltótétel ábrázolása, a határok bemutatása

A tétel a 2d-szelektor eljárás által képzett 2 dimenzióban így szól:

8.4.1. Tétel. *Laspeyres-Paasche váltótétel 2-dimenzióban:*

Ha q_{01} sík létezik (q_0 és q_1 nem esik egybe), a p_0 árvektor vetülete a q_{01} síkot két egyenlő részre bontja. Egy félsíkon belül bárhova mutat a Δp_1 különbségi árvektor, képezve a megfelelő árindexeket a Laspeyres és Paasche közül mindenhol ugyanaz lesz nagyobb. A p_0 vetületének pontjaiban a két árindex egyenlő.

Bizonyítás. Forgassuk a Δp_1 árvektort az origó körül, és minden pozícióban képezzük a Laspeyres-, és Paasche-indexeket! A vektor egy körbefordulása alatt 180° -on keresztül a Laspeyres-index a nagyobb, és a másik félköríven a Paasche-index. A két index egyenlő,

ha $\Delta \mathbf{p}_1$ iránya megegyezik \mathbf{p}_0 irányával; a váltás ezen a ponton történik. Ez a tulajdonság nem függ $\Delta \mathbf{p}_1$ nagyságától (abszolút értékétől) csupán a vektor szögétől. Emiatt a \mathbf{p}_0 árvektor iránya által meghatározott egyenes a teljes síkot kettéosztja.

Ha $\Delta \mathbf{p}_1$ iránya megegyezik:

- \mathbf{q}_0 -lal: a Laspeyres-indexnek maximuma vagy minimuma van.
- \mathbf{q}_1 -gyel: a Paasche-indexnek maximuma vagy minimuma van.

A tételhez tartozó képletek:

$I_{ar} = \frac{\Delta \mathbf{p} \cos(\varphi_q - \varphi_{\Delta \mathbf{p}})}{\mathbf{p}_0 \cos(\varphi_q - \varphi_{\mathbf{p}})}$, ahol $\varphi_{\mathbf{q}}$, $\varphi_{\mathbf{p}}$, $\varphi_{\Delta \mathbf{p}}$, az indexnek megfelelő vektoroknak egy kiválasztott koordinátatengellyel bezárt szögei. A továbbiakban ez az x tengelyt jelenti.

A fenti I_{ar} képlet három részre bontható:

1. $\frac{\Delta \mathbf{p}}{\mathbf{p}_0} = p_{1/0} - 1$ a relatív árindex növekmény
2. $q_{vet} = \cos(\varphi_q - \varphi_{\Delta \mathbf{p}}) \Delta \mathbf{p}_1$ vetülete a \mathbf{q} egyenesen
3. $q_{vkor} =$ vetülési korrekció.

A \mathbf{p}_0 vetülése \mathbf{q} -ra ad egy relatív rövidülést(hosszabbodást) a tényleges vetülési hosszhoz viszonyítva, amelyek a nagyobb körökbe rajzolt kisebb Thales-körök mutatnak be. Az egységnyi érték a kosáregyenesen csak a Thales-kör metszéspontjáig tart.

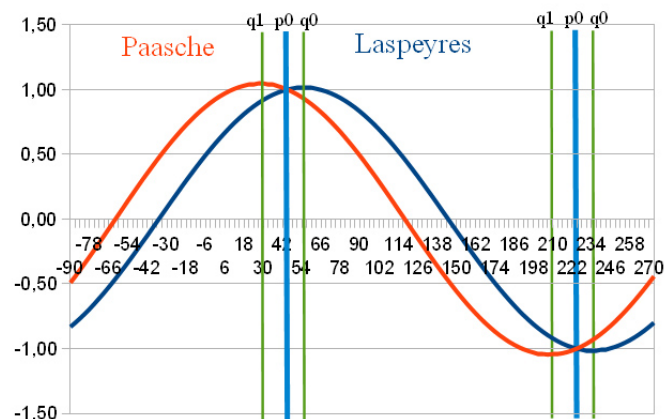
Így összesítve:

$$I_{ar} = \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{p}_0} \cos(\varphi_{\mathbf{q}} - \varphi_{\Delta \mathbf{p}}) \frac{1}{\cos(\varphi_{\mathbf{q}} - \varphi_{\mathbf{p}})} = (p_{1/0} - 1) q_{vet} q_{vkor}$$

Vizsgáljuk meg, mi szabályozza, hogy egy-egy félsíkon melyik árindex dominál, azaz melyik árindex értéke magasabb.

Laspeyres-Paasche dominancia esetei, ábrázolása geometriailag:

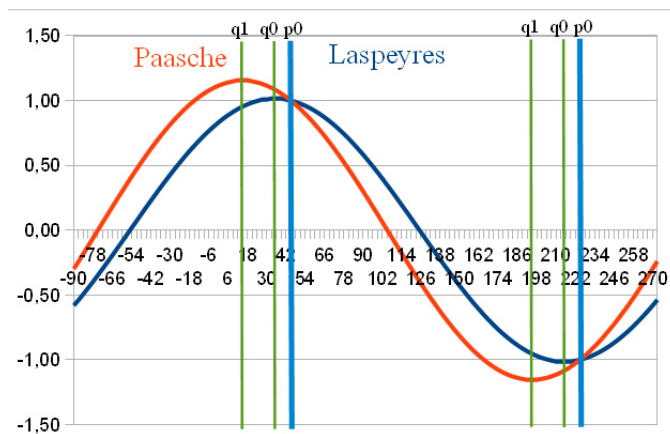
1. Első eset:



8.9. ábra. Laspeyres-Paasche váltótétel 2-dimenzióban geometriailag; első eset

Ha a két kosáregyenest a \mathbf{p}_0 egyenese elválasztja, akkor mindkét oldalt a kosárnak megfelelő index dominálja, vagyis a \mathbf{q}_0 oldalit a Laspeyres-index, a \mathbf{q}_1 oldalit pedig a Paasche.

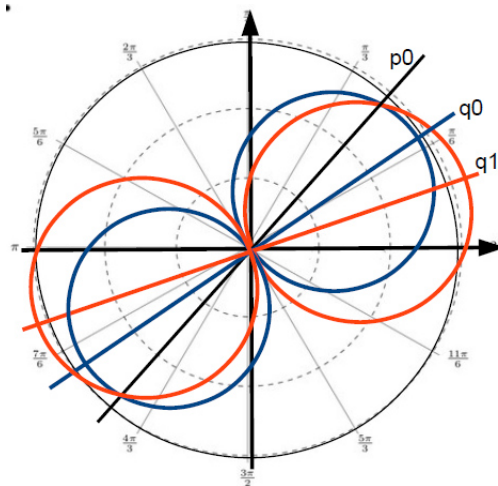
2. Második eset:



8.10. ábra. Laspeyres-Paasche váltótétel 2-dimenzióban geometriailag; második eset

Ha a két kosáregyenes a \mathbf{p}_0 egyenesének azonos oldalán áll, akkor azt az oldalt az dominálja, amelyik nagyobb szöget zár be \mathbf{p}_0 -lal. A \mathbf{p}_0 -hoz közelebb eső egyenes a másik oldalt dominálja. Ezt a szabályt a távolsági paradoxon magyarázza. A \mathbf{p}_0 -lal nagyobb szöget bezáró \mathbf{q}_1 miatt a vetületi korrekció is nagyobb, ami jól látszik a Paasche-indexgörbe nagyobb maximumánál.

3. Polár koordinátás ábrázolással:



8.11. ábra. Laspeyres-Paasche váltótétel 2-dimenzióban geometriailag; polár-koordinátás ábrázolás

Ez az ábra polárkoordináta rendszerben mutatja azt az előbbi esetet, amikor a \mathbf{p}_0 vektor zárja be a legnagyobb szöget az x tengellyel. Ez a polárkoordinátás változat más irányból mutatja be a Paasche-Laspeyres váltás érdekességeit. Az ábra alapján megtévesztően úgy tűnhet, mintha a váltás 90° -onként következne be, de figyelembe kell venni, hogy a nagyobb abszolút értékű a negatív tartományban valójában kisebb. Ezen konstellációban $0^\circ < \mathbf{q}_1 < \mathbf{q}_0 < \mathbf{p}_0 = 45^\circ$ reláció áll fent. Az Európai Unió országainak többségénél ugyanezen konstelláció mutatható ki a 2020 áprilisi havi árindexnél.

A bemutatott ábrákon és a feldolgozott Európai Unió áprilisi adatoknál is mindig az a helyzet áll elő, hogy a Pasche-dominancia a $(-135^\circ; 45^\circ)$ tartományban található. De ez nem törvényszerű. Ennek itt az az oka, hogy a Cavallo szorzótényezők a kosarakat mind hasonló irányba mozdítják. Ugyanakkor, ha a „Covid-tűző” áruk a függőleges tengelyre kerültek volna, a $(-135^\circ; 45^\circ)$ tartományban éppen Laspeyres-dominancia lenne.

8.4.2. Megjegyzés. Ez a tétel technikailag is azért lényeges, mert a sztereotipikusan „felül, alul becslésnek” megfelelő egyirányú korrekciós eljárások jogosultságát kérdőjelezi

8.4.2. A Paasche-Laspeyres váltótétel bemutatása Magyarország adatain

8.12. ábra. Laspeyres-Paasche váltás Excel-táblában bemutatva; Magyarország (2009-2018) COICOP12

- Középső: Értékmátrix (amit kiszámolunk)
- Fent: Ármátrix (**P**)
- Balra: Súlymátrix (**Q**) „eltolt” súlyokkal -mindig 2 évvel ezelőttit használunk, így a hivatalos kosarakat 2 évvel visszadatáltuk.
- Legalul található a vízszintesen szomszédos értékmátrix elemekből számolt árindexek.

- Ebben a mátrixban a hivatalos értékek (Laspeyres típusú-/Lowe-index) lilával vannak, alatta sárgával a Laspeyres-index, és az alatt –szintén sárgával– a Paasche-index.
- Pirossal azt az értékpárt kereteztük be, ahol a Laspeyres-index volt nagyobb –ez az, ami megfelel a sztereotípiáknak.

8.4.3. A Paasche-Laspeyres váltótétel általános, n-dimenziós esete

Elemezve az árindex n-dimenziós esetét, az eddig két dimenzióban mozgatott $\Delta \mathbf{p}_1$ vektor nem csak a q_{01} síkon mozoghat, hanem az n-dimenziós tér tetszőleges irányába elfordulhat. Ez nem sokat változtat az indexképzésen: minden lényeges esemény a kosarak síkján történik, $\Delta \mathbf{p}_1$ valódi iránya tulajdonképpen lényegtelen. A változás csupán annyi, hogy most nem a kosarak síkját kell \mathbf{p}_0 vetületével kettészelni, hanem egy n-dimenziós térben kell képezni egy (n-1)-dimenziós alteret, amely a teljes teret kettéosztja. Az alter alaptulajdonsága, hogy a q_{01} síkra való vetülete megegyezik \mathbf{p}_0 vetületével.

A Laspeyres-, és Paasche-indexek a javak által generált n-dimenziós tér felén dominánsak, azaz nagyobbak, mint a másik. Vagyis az eloszlásuk szimmetrikus elméleti szinten –ezt Köves Pál és Fisher is említette. A gyakorlatban torzulhat, de nagyobb "időablakot" nézve mindkét esetre látunk példát –ami a dolgozatban az KSH honlapjáról származó adatok alapján bemutatásra is kerül. A kiszámolt példán is látszik, hogy az eloszlás torzulása pont ellentétes irányú, mint ami az általános vélekedésben elterjedt gazdasági alapigazság –vagyis a Paasche-index nagyobb mostanában a legtöbb esetben. A vélekedés jelenlétét a köztudatban empirikusan is teszteltük szóbeli kérdéses jelleggel beszélgetés toldalékként.

A határoló (n-1)-dimenziós alter egyenlete:

$$\det(\mathbf{V}(\Delta \mathbf{p}_1)) = 0, \text{ ahol } \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_0 \\ \mathbf{q}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_0 & \mathbf{p}_1 \end{bmatrix}.$$

Vagyis V egy 2x2-es mátrix.

Ezt az egyenletet most nem vezetjük le (ez is egy módja a bizonyításnak), hanem megfogalmazunk két általánosabb tételt, amelyek alapján ez a tétel is bizonyítható.

8.4.3. Tétel. *Értékmátrix tétel:*

A Paasche-index akkor és csak akkor nagyobb, egyenlő, kisebb a Laspeyres-indexnél, amikor az értékmátrix determinánsa nagyobb, egyenlő, kisebb nullánál.

8.4.4. Tétel. *Együttfutás tétel:*

A tárgyidőszaki ár- és volumenindexek egyidejűleg nagyobbak, egyelők vagy kisebbek a bázisidejűeknél.

Az értékmátrix tétel nem mondja ki, hogy ár- vagy mennyiségi indexről van-e szó. Az együttfutás tétel magyarázza ezt a látszólagos pontatlanságot.

8.4.5. Tétel. *Értékmátrix és együttfutás tétel összefoglaló matematikai képlete:*

$$\text{sign}(\det(\mathbf{V})) = -1 \iff I_{Paaar} < I_{Laspar} \iff I_{Paavol} < I_{Lasvol}$$

$$\text{sign}(\det(\mathbf{V})) = 0 \iff I_{Paaar} = I_{Laspar} \iff I_{Paavol} = I_{Lasvol}$$

$$\text{sign}(\det(\mathbf{V})) = 1 \iff I_{Paaar} > I_{Laspar} \iff I_{Paavol} > I_{Lasvol}$$

8.4.6. Megjegyzés. Átfogó munka révén a kimondott tételek, állítások mélyebben nem itt kerültek bizonyításra (de igazoltak). Elméletibb és "matematikaibb", de mégis gazdasági témájú dolgozatainkban ezek megtalálhatók. Informatikai megvalósításra is találhatunk bennük példát. Egyedül a Laspeyres-Paasche váltótétel bizonyításának egyik fajtáját néztük meg kicsit részletesebben, mert az gazdaságilag elvi jelentőségű, s a Covid-kapcsán (is) "nagyon sérül" Hicks-tétele, ami bár csak "gazdaságilag értelmes eseteket vizsgál", de nem érdemes mégsem figyelmen kívül hagyni az esetek több mint felét (elméleti szinten felét) "gazdaságilag értelmetlennek titulálás által". Ez egyben igazolja azt is, hogy a 2 index ritkán egyezik (bár a közel egyezés a közel definíciójának függvényében bármikor teljesülhet, de egy idő után nem igazán lesz sokat mondó, releváns állítás.)

Az értékmátrix képzése:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_0 & \mathbf{q}_1 \end{bmatrix}, \text{ és } \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_0 & \mathbf{p}_1 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{Q} = \mathbf{q}_0 \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_0 \\ \mathbf{q}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_0 & \mathbf{p}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_0 \mathbf{p}_0 & \mathbf{q}_0 \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{q}_1 \mathbf{p}_0 & \mathbf{q}_1 \mathbf{p}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_0 \mathbf{p}_0 & \mathbf{q}_0 \Delta \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{q}_1 \mathbf{p}_0 & \mathbf{q}_1 \Delta \mathbf{p}_1 \end{bmatrix}$$

Az utolsó, \mathbf{p}_1 helyett $\Delta \mathbf{p}_1$ -et tartalmazó mátrixhoz úgy jutottunk, hogy az értékmátrix második oszlopához hozzáadtuk az első oszlop (-1)-szeresét. Ezzel azt igazoljuk, hogy azok a tulajdonságok, amelyeket a $\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1$ vektornégyesre mondunk ki, $\Delta \mathbf{p}_1$ -re is érvényesek.

A két árindex különbségének kifejtése az általános képlettel:

$$I_{arPaa} - I_{arLasp} = \frac{\mathbf{q}_1\mathbf{p}_1}{\mathbf{q}_1\mathbf{p}_0} - \frac{\mathbf{q}_0\mathbf{p}_1}{\mathbf{q}_0\mathbf{p}_0} = \frac{(\mathbf{q}_1\mathbf{p}_1)(\mathbf{q}_0\mathbf{p}_0) - (\mathbf{q}_0\mathbf{p}_1)(\mathbf{q}_1\mathbf{p}_0)}{(\mathbf{q}_1\mathbf{p}_0)(\mathbf{q}_0\mathbf{p}_0)} \geq 0$$

A nevező mindig pozitív, ezért az előjelet nem befolyásolja. Ezt elhagyva az alábbi képlethez jutunk:

$$(\mathbf{q}_1\mathbf{p}_1)(\mathbf{q}_0\mathbf{p}_0) - (\mathbf{q}_0\mathbf{p}_1)(\mathbf{q}_1\mathbf{p}_0) = \det(\mathbf{V}) \geq 0$$

Ezzel villámgyorsan jutottunk el a kívánt eredményre, ami bizonyítja a tételt (a levezetés hosszadalmasabb, s kevésbé látszik a közgazdasági alap).

Ez az eredmény teljesen szimmetrikus, és a volumenindexre épp úgy érvényes, mint az árindexre.

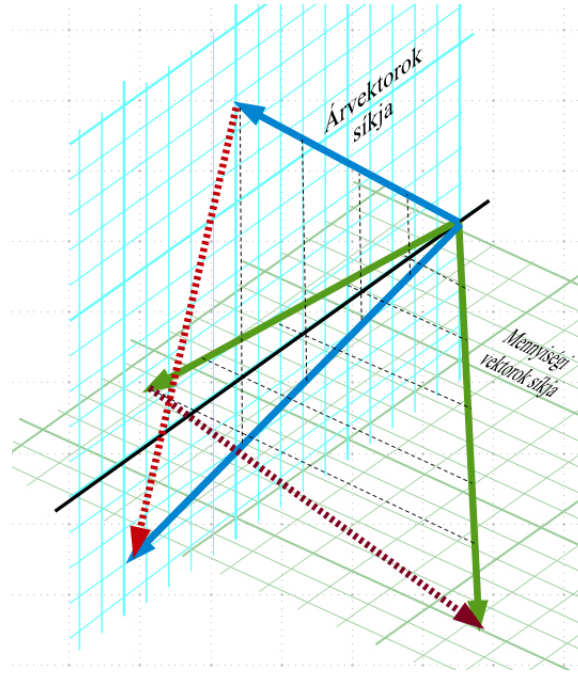
$$\text{Valóban: } I_{volPaa} - I_{volLasp} = \frac{\mathbf{q}_1\mathbf{p}_1}{\mathbf{q}_0\mathbf{p}_1} - \frac{\mathbf{q}_1\mathbf{p}_0}{\mathbf{q}_0\mathbf{p}_0} = \frac{(\mathbf{q}_1\mathbf{p}_1)(\mathbf{q}_0\mathbf{p}_0) - (\mathbf{q}_0\mathbf{p}_1)(\mathbf{q}_1\mathbf{p}_0)}{(\mathbf{q}_0\mathbf{p}_1)(\mathbf{q}_0\mathbf{p}_0)}$$

Ezzel a módszerrel szintén ugyanarra az eredményre jutunk.

Az előbb tárgyalt Laspeyres-Paasche váltótétel annyiban különbözik a később tárgyaltaktól, hogy azokban a két alapindex váltakozását csak $\Delta\mathbf{p}_1$ függvényében vizsgáltuk. Tehát a $\det(\mathbf{V}(\Delta\mathbf{p}_1)) = 0$ egyenlet lesz a válaszfal (határ) a két index dominanciája között. A $\det(\mathbf{V}(\Delta\mathbf{p}_1)) = 0$, azt jelenti, hogy csak a $\Delta\mathbf{p}_1$ -től függ a determináns, a többi változó rögzített.

Ugyanakkor a $\det(\mathbf{V})$ összességében négy vektor együttes helyzetéről szól, vagyis a 12-dimenziós COICOP rendszerben egy 48 dimenziós skalárfüggvény.

Az alábbi ábra azt az esetet mutatja, amikor az árvektorok vetületei egy irányba esnek a mennyiségi vektorok (kosarak) síkján. Ekkor az árvektorok által meghatározott sík merőleges a kosarak síkjára, így a mennyiségi vektorok vetülete szintén egybe fog esni az árvektorok síkján. A vetületek helye is ugyanaz, a két sík metszésének egyenesre, amit az ábrán vastag fekete vonallal jelöltünk. Az árvektorok függőleges síkja kék, mint az árvektorok, amelyek ezen a síkon helyezkednek el. A mennyiségi vektorok vízszintes síkja zöld, mint a vízszintes zöld vektorok is. Az ábra az általános $\det(\mathbf{V}) = 0$ olyan (speciális) esetét mutatja, amikor a két sík úgy merőleges egymásra, hogy van egy közös egyenesük. További lehetőség, ha vagy az ár-, vagy a mennyiségi vektorok egyirányúak.



8.13. ábra. Ár- és mennyiségi vektorok egymásra merőleges síkon

Az ábrán vázolt 3d-ábrázolás fenti, speciális esetével szemben a $\det(\mathbf{V}) = 0$ általános esetében a \mathbf{q}_0 , \mathbf{q}_1 , \mathbf{p}_0 , \mathbf{p}_1 vektornégyes tagjai függetlenek, és egy 4-dimenziós alteret határoznak meg. Lássunk erre egy egyszerű példát 4d-s koordinátákkal. A négy oszlopvektor mátrixának a determinánsát azért számoljuk ki, hogy igazoljuk a négy vektor függetlenségét. (Abban az esetben nem függetlenek, amikor a négy vektor által meghatározott mátrix determinánsa nem nulla: $\det(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1) \neq 0$; ez a példában teljesült.)

8.4.7. Példa. $\mathbf{q}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{q}_0 & \mathbf{q}_1 & \mathbf{p}_0 & \mathbf{p}_1 \end{bmatrix} = -2.$$

$$\det \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_0 \mathbf{p}_0 & \mathbf{q}_0 \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{q}_1 \mathbf{p}_0 & \mathbf{q}_1 \mathbf{p}_1 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 7 & 10 \end{bmatrix} = 0$$

$$I_{ar} = \frac{\mathbf{q}_1 \mathbf{p}_1}{\mathbf{q}_1 \mathbf{p}_0} = \frac{\mathbf{q}_0 \mathbf{p}_1}{\mathbf{q}_0 \mathbf{p}_0} = \frac{10}{7}$$

Mégis $\det(\mathbf{V}) = 0$; vagyis a példán is látható, hogy $\det(\mathbf{V}) \neq \det(\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, \mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1)$.

9. fejezet

Árindexképzés speciális esetekben

A következőkben a gyakorlatban használt speciális eseteket nézzük át. Legyen $\delta \mathbf{p}_1$ minden esetben százalékban megadva.

Az értékmátrix elemeit képezzük, amiből a Paasche- és Laspeyres-indexek egyszerűen képezhetőek.

9.1. Árindexképzés tetszőleges kosarak és egységnyi p_0 esetén

Ebben az esetben a minden komponensében 1 értékű bázis és egy kosárvektor szorzata a kosár súlyainak összegét adja ki.

$$\mathbf{V} = \mathbf{Q}'\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_0 \\ \mathbf{q}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \Delta \mathbf{p}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|\mathbf{q}_0\|_1 & \|\mathbf{q}_0\|_1 I_{arLasp} \\ \|\mathbf{q}_1\|_1 & \|\mathbf{q}_1\|_1 I_{arPaa} \end{bmatrix}$$

A mátrix alapján az árindexek értékei az alábbiak lesznek, hogy $\Delta \mathbf{p}_1$ továbbra is százalék maradjon:

$$I_{arPaa} = \frac{v_{11}}{v_{10}}, \text{ és } I_{arLasp} = \frac{v_{01}}{v_{00}}.$$

A determináns értéke:

$$\det(V) = \det \begin{bmatrix} \|\mathbf{q}_0\|_1 & \|\mathbf{q}_0\|_1 I_{arLasp} \\ \|\mathbf{q}_1\|_1 & \|\mathbf{q}_1\|_1 I_{arPaa} \end{bmatrix} = \|\mathbf{q}_0\|_1 \|\mathbf{q}_1\|_1 (I_{arPaa} - I_{arLasp})$$

képlet

9.1.1. Árindexképzés 1-es norma szerinti, „szumma egyenlő 100-ra” normált kosarak és egységnyi p0 esetén

Ez az előző eset speciális esete. Ekkor tudjuk hogy:

$$\|\mathbf{q}_0\|_1 = 100, \text{ és } \|\mathbf{q}_1\|_1 = 100.$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{Q}'\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_0 \\ \mathbf{q}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \Delta\mathbf{p}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 & 100 * I_{arLasp} \\ 100 & 100 * I_{arPaa} \end{bmatrix}$$

Az árindexek százalékban adottak. Ekkor a determináns:

$$\det(\mathbf{V}) = \begin{bmatrix} 100 & 100 * I_{arLasp} \\ 100 & 100 * I_{arPaa} \end{bmatrix} = 100^2 * (I_{arPaa} - I_{arLasp})$$

10. fejezet

A felelős-dimenziók elmélete

A változás „eltűnését” eddig geometriai módon szemléltettük és vezettük le (a vetület attól függően mit mire vetítünk (covid, illetve 2 évvel ezelőttire bemért kosár) teljesen más vetület nagyságot ad). Majd a 12 dimenziót 2-be képezve (növekvésért felelős-csökkenésért felelős komponens) ábrázoltuk a kapott eredményeket az EU-s országokra.

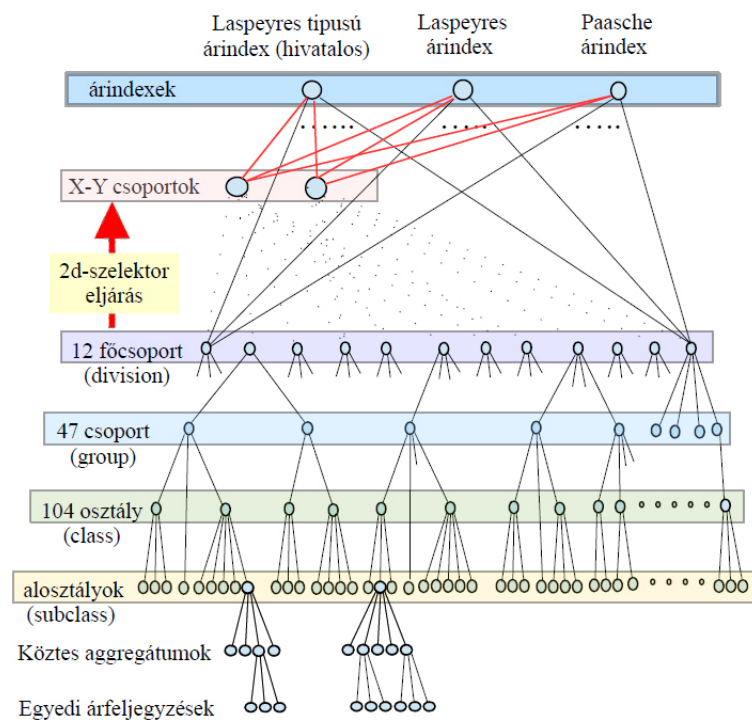
Ennek viszont gazdasági módon is van értelme.

A 12 alap dimenzió a COICOP 12 termékcsoportha definíció szerint.

Az a kérdés, hogy a valóságban érzékelt változást hol, és miért nem látjuk. Az okot sokan egyből megmondják: mert a súlyok nem úgy voltak a valóságban. Ahol szignifikáns az eltérés, s nagy volt a változás (vendéglátás, utazás, szórakoztatás főként, de az élelmiszer is oda tartozik valamennyire), azok a „felelős dimenziók”, amik a probléma alapjai. Ezek problémáját „javítja meg” az új súlyokkal a 2d- szelekciós eljárás (absztraktabb szinten), láthatóvá teszi az X. dimenzióban „elveszett eltérést” csoportosítva az eltéréseket típusok szerint.

Ezt az alábbi ábrán is megfigyelhetjük részleteiben, ha átgondoljuk az indexképzés módját.

Az ábra egyben a 2d-szelektor eljárás "megjelenési helyét, szintjét" is megmutatja:



10.1. ábra. Felelős dimenziók és a 2d-szelektor eljárás megjelenése az indexképzési szinteken

10.0.1. Megjegyzés. Ez önmagában még nem is lenne gond, de az átlag simító jellege miatt a nagyon kombinált csoportok „belül is simítanak”. (Az utóbbi problémakörrel viszont a dolgozatban nem foglalkozunk, s ez csak jelen esetre igaz, alapvetően más szempontból a belső mintavételezés optimális, s az EU szabványoknak megfelel).

11. fejezet

Összefüggés keresés, érdekes megfigyelések, gazdasági okaik feltárása

11.1. A súlyválasztás és az árindex közti összefüggés feltárása: régebbi időpontokhoz tartozó súlyokkal kisebb indexekhez jutunk

A súlyválasztás kérdésköre alapvető problémaköre a „kosaras árindexeknek”, amelyeket a dolgozat elején részletesebben ismertettünk. Főként a Lowe-, speciális esetben Laspeyres-típusú indexnél releváns ez a probléma, ugyanis ott nem aktuális, hanem bármely, t_n $n = 0, 1, 2 \dots k$ (az EU tagországokban $k=2$ a nemzetközi norma nyomán) évvel azelőtti súlyokat használunk. A t a tárgyévet jelöli a fenti képletben.

Több tanulmány íródott a $t - 1$ -es időszakhoz tartozó súly támogatására, vagyis a súlyok frissítésére vonatkozóan, ami a valósághűbb, torzítás mentesebb index képzést tűzné ki céljául (a dinamikusan változó világhoz képest viszont még így is nagyon simít, s a cseretermékek módszertanukkal egyetemben jelentős szerepet játszanak az események alakításában továbbra is).

Példaként a magyar adatokon empirikusan bemutatjuk (az összefüggés az EU országaira szintén teljesül), hogy minél korábbi súlyokat veszünk -a súlyokat 2 évvel visszadatáltuk, mivel a 2020-as súly 2018-hoz tartozik stb.-, annál kisebb indexet kapunk. Ezzel egybehangzóan, ha például 2012-ben vennénk a 2020-hoz tartozó súlyokat (az ábrán 2018-as), sokkal nagyobb értéket kapunk, mint az akkor számított.

Vagyis a korábbi súlyok alkalmazása az árindexeket lefelé mozdítja el. (Alapvetően a

tendencia tartás, stabilizálás okán, illetve egyéb közgazdasági okokból alakult így.)

A kezdetekben természetesen (1800-1990), amikor nem éven belül cserélődtek a termékek, hanem egy autót, s iparcikket 10-20 stb. éven keresztül ugyan annyiért, hasonló minőségben gyártottak ez nem jelentett egyáltalán problémát (ezért sem az élelmiszer az amit befolyásol ez a folyamat, a paradicsom, alma stb. mindig hasonló). Viszont az elektronika, háztartási gépek, autók stb. már teljesen más kategóriát alkotnak; ott a termékcseré kérdésköre szintén más mértéket ölt –ez jelenkori súlyokkal természetesen nem, vagy máshogy fordulna elő– (más kérdés, hogy ez technikailag hogyan lenne megoldható – pl. NAV, web-scraping, bekért forgalmi adatok, egyéb becslési módszerek).

Másik mód, hogy a terméket úgy specifikáljuk, hogy ne legyen szükség cserére –inkább népszerűség szerint, nagyobb intervallumokkal. A harmadik, hogy adattudományi módszereket vetünk be, s még több lépéssel egészül ki, s néhol átalakul a számítási folyamat. (Ez utóbbi viszont nagyon valószerűtlen, mivel a hivatalos statisztika irányelveinek a határán tartózkodik –nem véletlenül.)

A Laspeyres-típusú index tehát jelenleg nem felfelé, hanem „lefelé” becsül. (A dolgozatban empirikusan bemutattuk -valós adatokon-, hogy jelenleg általában a Paasche-index nagyobb, nem a Laspeyres -a vélekedés ellenére-.)

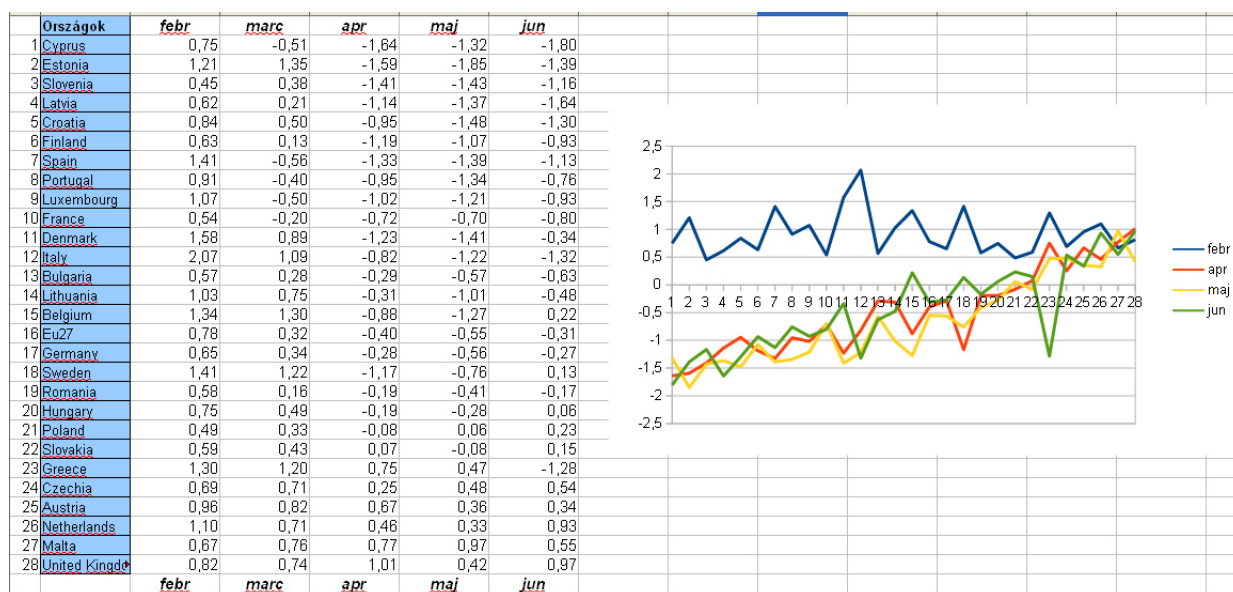
Tekintsük meg a kiszámított mátrixot -Magyarország 2009-2018-:

	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
2009	10000	10490	11217	11637	12127	13166	14001	14625	15350	15964	16923	17211	17143	17178	17289	17730	18297	19015
2010	10000	10490	11206	11635	12119	13121	13936	14529	15256	15864	16798	17102	17071	17089	17186	17626	18188	18881
2011	10000	10491	11210	11638	12126	13136	13956	14554	15283	15894	16838	17151	17122	17143	17241	17684	18251	18950
2012	10000	10497	11225	11657	12155	13182	14010	14615	15349	15962	16917	17246	17228	17259	17362	17815	18396	19114
2013	10000	10494	11215	11642	12140	13152	13974	14567	15295	15907	16862	17217	17226	17261	17363	17820	18406	19131
2014	10000	10496	11215	11639	12135	13135	13952	14540	15268	15877	16833	17203	17230	17267	17370	17831	18423	19154
2015	10000	10500	11225	11652	12150	13162	13979	14575	15298	15904	16858	17229	17256	17306	17418	17880	18474	19217
2016	10000	10501	11223	11651	12144	13147	13956	14547	15266	15868	16810	17171	17197	17245	17356	17814	18402	19135
2017	10000	10495	11212	11633	12125	13113	13927	14514	15224	15827	16764	17129	17158	17205	17315	17771	18358	19090
2018	10000	10501	11223	11644	12140	13124	13938	14529	15241	15838	16784	17182	17241	17300	17417	17886	18490	19246
det V	09-10	8	-1182	1023	-690	-4364	-2231	-3915	951	-301	-3045	2988	6270	-2896	-2161	253	-224	-3934
	10-11	79	318	-101	438	888	602	558	-8	325	1414	1422	328	492	126	162	541	759
	11-12	615	901	358	1094	1806	611	685	234	-127	1093	2466	1900	1717	777	1251	1744	2412
	12-13	-280	-650	-569	-8	-1665	-580	-1386	-471	208	491	4602	4670	573	-215	639	954	1142
	13-14	108	-200	-214	-262	-1389	-551	-538	253	-363	406	2667	3041	434	139	735	857	1096
	14-15	484	533	212	242	1223	-58	870	-1021	-630	-486	-99	162	2182	1431	4	146	1803
	15-16	41	-260	158	-646	-986	-996	-575	-324	-483	-1565	-1368	-211	-370	-2	-388	-814	-1267
	16-17	-568	-482	-796	57	-1694	925	-373	-1118	419	-400	885	554	-195	-109	-208	45	267
	17-18	613	488	-101	386	-537	-58	353	265	-996	1420	5270	5113	2118	1033	1747	2473	3347
árindex	02-03	03-04	04-05	05-06	06-07	07-08	08-09	09-10	10-11	11-12	12-13	13-14	14-15	15-16	16-17	17-18	18-19	
	2009	4,90	6,93	3,75	4,21	8,56	6,34	4,46	4,96	4,00	6,00	1,70	-0,39	0,21	0,64	2,55	3,20	3,92
	2010	4,90	6,82	3,83	4,16	8,27	6,21	4,25	5,01	3,99	5,88	1,81	-0,18	0,11	0,57	2,56	3,19	3,81
	2011	4,91	6,85	3,82	4,19	8,33	6,25	4,28	5,01	4,00	5,94	1,86	-0,17	0,12	0,57	2,57	3,21	3,83
	2012	4,97	6,93	3,85	4,28	8,45	6,28	4,32	5,02	3,99	5,98	1,95	-0,11	0,18	0,60	2,61	3,26	3,90
	2013	4,94	6,87	3,80	4,28	8,34	6,25	4,25	5,00	4,00	6,00	2,11	0,05	0,20	0,59	2,63	3,29	3,93
	2014	4,96	6,85	3,79	4,26	8,24	6,22	4,22	5,01	3,99	6,02	2,20	0,15	0,22	0,60	2,65	3,32	3,97
	2015	5,00	6,90	3,80	4,27	8,33	6,21	4,26	4,96	3,96	6,00	2,20	0,16	0,29	0,6438	2,65	3,32	4,02
	2016	5,01	6,88	3,82	4,23	8,26	6,15	4,24	4,94	3,94	5,94	2,15	0,15	0,26	0,6437	2,64	3,30	3,98
	2017	4,95	6,83	3,75	4,23	8,14	6,21	4,22	4,89	3,96	5,92	2,18	0,17	0,27	0,64	2,63	3,30	3,99
	2018	5,01	6,88	3,74	4,26	8,11	6,21	4,23	4,90	3,92	5,98	2,37	0,34	0,34	0,67	2,69	3,38	4,09

11.1. ábra. Régebbi súlyokkal kisebb árindexhez jutunk ; Magyarország COICOP 12 2009-2018

11.1.1. Megjegyzés. Kicsit mélyebben utalva a problémakörre: a $t-1$ -es időszakra empirikus tapasztalatok alapján a Laspeyres-Paasche dominancia arány még torzabb -s nem a Hicks által kijelölt irányba-. Emellett elméleti szinten sem teljesül Hicks állítása gyakrabban, mint amikor cáfolódik (lévén, hogy az esetek felében van Laspeyres-dominancia). A Laspeyres-Paasche dominanciára vonatkozó teszt, amely az univerzális Laspeyres-Paasche-dominancia tételen alapul megtalálható a dolgozatunban (informatikailag R-ben, illetve Excelben megvalósítva). (Ebben a dolgozatban Excelben látható kissé más formátumban, elven, s egyben "több funkciósan".) Tetszőleges struktúráilag egyező mátrixra (dimenzió változás nem probléma) használható, más országokra is kiszámítható. Eredményét a Magyar COICOP 12-es bontású 1996-2018 közti időablakra kiszámítottuk, bemutattuk. (Mivel a Covid időszakon kívül általában nincs jelenkori súly, így visszamenő kutatásokra, tendenciák vizsgálatára vagy fiktív súlyok tesztelésére lehet alkalmas, s egyben bizonyíték is (készítésének ez volt a célja, de a kimenet szépségével is foglalkoztunk a további hasznosíthatóság okán, amennyiben mélyebb kutatásokat szeretne egy érdeklődő végezni a végeredményeken gazdasági szempontból).)

11.2. A 2d-s árvektorok szögeinek vizsgálata az EU-s adatokon



11.2. ábra. EU-tagországok szögei 2020.február-2020.június; Covid-időszak

A táblázatban az Unió országok 2d-s árvektorainak szögei szerepelnek radiánban a 2020. február és 2020. június közötti havi indexekre. A szögeket a 2d-szelektor eljárással számítottuk ki MATLAB segítségével. Az árindex adatokat az EUROSTAT honlapjáról szereztük.

A közölt táblázatban a szögváltozás nagysága szerint lettek sorba rendezve az országok. A mellékelt diagram x tengelyén az országok szerepelnek a táblázat szerinti sorszámmal azonosítva, míg az y tengelyen a szögük nagysága szerepel radiánban.

A diagram színes vonalai egy-egy hónapot ábrázolnak, így minden hónapról a szögeloszlás látható. A színek jelentését az ábrán definiáltuk.

Megfigyelhető, hogy a februári, Covid-mentes időszakban minden ország szöge a pozitív tartományban tartózkodott. Ezzel szemben a Covid időszakban az országok 2/3-ánál a negatív tartományba kerültek a szögek. Az országok típusa pozitivitás szerint megmaradt az összes Covid-hónapra.

11.2.1. Megjegyzés. Az állítások a Covid-járvány első hullámára vonatkoznak, azt vizsgáltuk. (A második hullámnál nagyon különböző az országok viselkedése, korlátozások száma, így valószínűsíthetően nagyobb szórás lenne látható szögek szempontjából is, de

ez csak hipotézis. Jelenleg inkább a kidolgozott módszerek gazdasági "szinkronizálásával", s a matematikai területek megjelenés helyével foglalkozunk főként (pl. közömbösségi görbék szerkesztése, vizsgálata különböző szinteken, lehetséges alakjai, kiegészítő indexek, triviális 2d-ekvivalens tulajdonságai, sztochasztikus programozás megjelenése stb., emellett a kiegészítő, speciális és személyre szabott, "tömegesen személyre szabott" indexek is érdekes, Covid-szempontról is lényeges –azt is tekinthetjük egy altípusnak– kutatási terület ami érdekesítő volt miatt másfajta irányokat nyit meg). A Konusz-index, s gondolkodásmódjának megjelenése a Covid-ban is látható volt egy-két felvillanásban (feketepiacra alkalmas) pl. a Lehel piaci csirkeár történetének alapja is ez, bár inkább "pszichológiai okból", de gazdaságilag azonos folyamat, s igazolja az elmélet létjogosultságát.) Keletkezésének történetét a "Konusz és a feketepiac" című anekdota írja le.

12. fejezet

Összefoglalás

A dolgozat témájának ötletét a Covid-időszak első hulláma adta, ahol nagyon egyedi események is előfordultak. A gyakran érzékelt változást, fluktuációt sokan úgy érezték nem mérte megfelelően az árindex, s nem értették, hova "tűnt a változás". A változás eltűnését ezért a dolgozatban a dimenziók között kielemeztük, s megmutattuk, hogy két hasonló index is lehet teljesen más szögű, így tehát egy olyan plusz mutatóhoz, ábrázolásmódhoz jutottunk, amellyel látható, hogy az árindexeknél aktuális Covid-súlyokkal látszik 2 dimenzióban (a 12 dimenziót képeztük 2 dimenzióba) a változás, csak egyben nem. Így bemutatja, hogy bár érték szintjén úgy érezzük nem látjuk, mégis benne van; csak jól kell nézni. Azért, hogy a "szemüveg", amelyen keresztül nézni szeretnénk "érthető képet adjon" a látásmód elemeit is röviden részleteztük, bemutattuk mielőtt rátértünk volna a Covid-időszak elemzésére.

A felelős dimenziók elméleténél megmutattuk gazdaságilag is az eltűnést a matematikai szemlélet mellett. A dolgozatban az árindexek geometriai, mátrixos értelmezésmódja, vektorszemlélete a domináns. A mű egy nagyobb munka, elemzés, fejlesztés kis részletét tudja mutatni be, így a további kutatási irányok sokrétűek.

A dolgozat további célja a létező havi adatokból egyértelműbb eredmények kiszámítása volt, illetve az eredmények ábrázolása úgy, hogy az láthatóvá váljék. Az új gazdaság-matematikai módszerek, algoritmusok és árindex-értelmezésmódok kifejlesztése és alkalmazása megtörtént az eredmények vizsgálatával együtt az elméletet és gyakorlatot összehangolva. Mivel rengeteg alkalmazható matematikai elmélet van, így teljesen bevégezni nem lehet; minden megválaszolt kérdés 5 másikat hoz magával.

A kutatás során figyelembe vettük a közgazdaságtan alapfeltevéseit, néhol megkérdőjelezve azokat. A szubjektivitást kiküszöböltük a Covid-számítás során,

automatikus ábrázolásmódot fejlesztettünk ki. A meglévő, publikus adatokból igyekeztünk a legtöbbet kihozni felhívva a figyelmet az esetleges problémák okaira. A dolgozatban röviden kitértünk az árindex-számítás történetére, a Covid időkből megfigyelhető fogyasztói kosár változásának okaira, részleteire. Megvizsgáltuk a pszichológiai viselkedésformák gazdasági hatásait, s operációkutatási célfüggvény váltás, túlélési függvény bevezetés megvalósulására is kitértünk, amely problémakört mélyebben is körbejártunk egy másik dolgozatban. Megvizsgáltuk a Laspeyres, Paasche index-szel kapcsolatos sztereotípiákat, Magyarország adatain 2009-2018 közt be is mutattuk a vizsgálat eredményeit. Megfigyelhettük azt is, hogy régebbi súlyokkal tendenciózusan kisebb árindexekhez jutunk. Kimondjuk és bebizonyítjuk az ún. Paasche-Laspeyres váltótételt a 2d-szelektor eljárás kapcsán, illetve az általános, kisebb, nagyobb, egyenlőséggel kapcsolatos tételeket is (ezeket együttesen árindex- dualitási tételeknek is nevezhetjük; a név okait, s mélyebb ismertetést szintén egy másik dolgozatban fejtettük ki). A kifejlesztett Cavallo-szorzó-faktorokon alapuló 2d-szelektor eljárást alkalmaztuk gyenge és erős Covid-hatás detektálásra, automatikus szelektálásra, szög megállapításra. Az eredményeket különböző ábrázolási módokkal szemléltettük az EU országaira. A vizsgálandó adatokat a KSH és EUROSTAT honlapjáról, az elterjedt számítási módszereket a vonatkozó szakirodalomból illetve publikus honlapokról gyűjtöttük le, fejlesztettük tovább, ültettük át mátrixos, vektoros alapokra. Az adatok saját feldolgozása, a 2d-szelektor eljárás megvalósítása informatikai eszközökkel történik. További kutatások folynak a módszerek szinkronizálása, a közömbösségi görbe szerkesztés, az elmélet-gyakorlat összehangolása kapcsán a Covid-, illetve egyéb pl. ön- és központi korlátozások témájában. A szemléletmód további kiterjesztése, gazdasági tételek "igazságtartalom és feltétel vizsgálata" szintén folyik az aktuális, dinamikusabb világra Covid-időszakra illetve Covid előtti időkre. A további tervekhez vonatkozóan megállapítható, hogy az árindexek birodalmában matematikai és informatikai eszközökkel rengeteg új érdekes és hasznos irány nyílik meg, amelyekben érdeklődés szerint folyhatnak tovább a kutatások és fejlesztések.

A kutatás végkövetkeztetése, hogy – bár a jelenleg elterjedt módszerekkel a változások általában nem kimutathatók, „eltűnnek”, – a kifejlesztett módszerekkel és ábrázolással a változások jól kimutathatóak.

A. függelék

Ábra jegyzék

A.1. Ábrák jegyzéke

1.1. COICOP 11,12,7,4 -es főcsoport kosársúlyainak változásai 2011 és 2020 között	13
1.2. COICOP 3,1,2,5 -ös főcsoport kosársúlyainak változásai 2011 és 2020 között	13
1.3. COICOP 10,9,6,8 -as főcsoport kosársúlyainak változásai 2011 és 2020 között	13
2.1. Árindexek csoportosítása súlyozás szerint (súlyozatlan=ekvidisztánsan súlyozott)	15
2.2. Leggyakoribb kosármentes ("súlymentes", ekvidisztáns súlyozású) árindexek összefoglaló táblázata	15
2.3. Legfőbb árindexek csoportosítása linearitás szerint	16
2.4. Leggyakoribb kosaras ("súlyozott") árindexek összefoglaló táblázata	17
2.5. Árindexek számításánál alkalmazott szintek	17
3.1. Áridex axiómák 1. rész	19
3.2. Áridex axiómák 2. rész	20
4.1. Egyszerű mátrix szemlélet; 3-dimenziós mátrix-modell	21
4.2. 3-dimenziós modell megvalósítása Excel táblázatkezelővel	23
4.3. A Laspeyres és Laspeyres-típusú index különbsége; n-dimenziós mátrix modell	23

4.4.	Értékmátrix alapján értékindex, volumen index és árindex képzése	26
5.1.	Láncindexek additivitási problémája. SNA'93 példa nyomán.	30
5.2.	SNA'93 módosított változat; indexek kiszámítása konkrét értékekre	30
6.1.	A koronavírus első hullámának hatása a COICOP főcsoportokra, vásárlási szokásokra	31
7.1.	A Cavallo-szorzófaktorok, COICOP-súlyok a Covid-időszakra	36
7.2.	Számítások: Magyarország COICOP12 2020.04; Covid-időszak	37
7.3.	Kosárszög: Magyarország COICOP12 2020.04; Covid-időszak	38
7.4.	Kosár-szögek az EU 17 országára; Excelben kiszámítva	39
8.1.	2d-szelektor eljárás általános működési elve, lépései	41
8.2.	2d-szelektor eljárás alkalmazása, számítása (Magyarország, 2020.04; COICOP12)	42
8.3.	2d-szelektor eljárás matematikája	42
8.4.	Cavallo-szorzófaktorok kis hatványainak vizsgálata a gyenge COVID-típusú hatások felderítésére	44
8.5.	$\Delta \mathbf{p}_1$ és vetületeinek ábrázolása polárkoordinátákkal	45
8.6.	Az EU-s országok árindexeinek polár-koordinátás ábrázolása	46
8.7.	Covid-hatás vizsgálata EU-s országok árindexein (2020.04); polár-koordinátás ábrázolás	48
8.8.	Laspeyres-Paasche váltótétel ábrázolása, a határok bemutatása	49
8.9.	Laspeyres-Paasche váltótétel 2-dimenzióban geometriailag; első eset	51
8.10.	Laspeyres-Paasche váltótétel 2-dimenzióban geometriailag; második eset	51
8.11.	Laspeyres-Paasche váltótétel 2-dimenzióban geometriailag; polár-koordinátás ábrázolás	52
8.12.	Laspeyres-Paasche váltás Excel-táblában bemutatva; Magyarország (2009-2018) COICOP12	53
8.13.	Ár- és mennyiségi vektorok egymásra merőleges síkon	57

10.1. Felelős dimenziók és a 2d-szelektor eljárás megjelenése az indexképzési szinteken	62
11.1. Régebbi súlyokkal kisebb árindexhez jutunk ; Magyarország COICOP 12 2009-2018	65
11.2. EU-tagországok szögei 2020.február-2020.június; Covid-időszak	66

B. függelék

Irodalom jegyzék

B.1. Irodalomjegyzék

1. Báger Gusztáv (szerk) (2011): A hagyományos nemzeti számlarendszer és az alternatív értékelési módszerek, indikátorrendszerek. Budapest, Állami Számvevőszék Kutató Intézete 2011. december.
2. Banai Ádám – Vágó Nikolett – Winkler Sándor (2017): Az MNB lakásárindex módszertana. MNB-tanulmányok 127. Budapest, MNB 2017 március
3. Cavallo, Alberto (2020): Inflation with Covid Consumption Baskets. Working Paper 27352, Harvard Business School & NBER, May, 2020
<http://www.nber.org/papers/w27352>
DOI 10.3386/w27352
4. Csahók István (1998): Az MTA statisztikai bizottságának 1998. március 18-i kibővített ülése. Fogyasztói árindexek, elmélet, gyakorlat, EU-harmonizáció. In: Statisztikai Szemle 1998.04.
5. Diewert, Erwin – Fox, Kevin (2020): What happens to inflation when we cannot buy goods during a lockdown? 15 may 2020 {<https://newsom.unsw.edu.au/news/business-law/what-happens-inflation-when-we-cannot-buy-goods-during-lockdown>}
6. Diewert, W. Ervin – Fox, J. Kevin (2020): Measuring real consumption and cpi bias under lockdown conditions. Working Paper 27144. May 2020.
7. Diewert, W. Erwin (2005): Index Number Theory using differences rather than ratios. Jan. 2005. Department of Economics the University of British Columbia Vancouver, Canada V6T 1Z1.

8. Diewert, W. Erwin (2013): Irving Fisher and Index Number Theory. In: Journal of the History of Economic Thought June 2013 DOI: 10.1017/S1053837213000072
9. ECLAC (2020): Producing the consumer price index (CPI) and the Covid-19 pandemic in Latin America and the Caribbean. April 2020.
10. Ferenci Tamás (2018): Ökonometria I. Kategoriális magyarázó változók. 2018 április 10. http://www.medstat.hu/oktatas/okonometriaI/FerenciTamas_OkonometriaI.pdf(2020.10.28)
11. Ferenczi Barnabás – Valkovszky Sándor – Vincze János (2000): Mire jó a fogyasztói-ár statisztika. In: MNB füzetek 2000/5.
12. Haaukainen, Antti – Malinen, Jarmo – Ojalampi, Antti (2020): Efficient solution of symmetric eigenvalue problems from families of coupled systems. Cornell University 18 juni 2020. <https://arxiv.org/abs/1806.07235>
13. HajnalMihály – Várhegyi Judit (2016): Infláció. In: Oktatási füzetek 1. szám. Magyar Nemzeti Bank
14. Horváth Róbert (1977): Adam Smith munkássága és az indexelmélet. Statisztikai Szemle Történeti dolgozatok. előadás 1977 május 31 és június 2 között.
15. Horváth Róbert (1977): Adam Smith statisztikai koncepcióiról. Statisztikai Szemle. 1977.
16. Huerga, Javier – Steklacova, Lucia (2008): An application of index numbers theory to interest rates. Working Paper series No 939 september 2008.
17. Jinjarak, Yothin et al.(2020): Pandemic shocks and fiscal-monetary policies in the Eurozone: Covid-19 dominance during January – June 2020. NBER Working Paper series. 27451. Cambridge, June 2020.
18. Kerékgyártó Györgyné – Melega Tiborné – Szabó Éva (1999): A fogyasztói árindex számítás harmonizációja. In: Statisztikai Szemle 1999.07. hó p.490- 501
19. Kovács Ilona (2003): A fogyasztói árindex torzító tényezői. Budapest, MTA KTK, 2003. URL:<https://mek.oszk.hu/01400/01468>
20. Kovács Ilona (2003): A fogyasztói árindex torzító tényezői. MTA Közgazdasági Kutatóközpont. Budapest, 2003 június
21. Köves Pál(1981): Indexelmélet és közgazdasági valóság. Akadémia kiadó, Budapest,1981. 212 p.
22. Kőhegyi Gergely – Horn Dániel – Major Klára (2010): Mikroökonómia I.B. Fogyasztás és kereslet. ELTE TáTK Közgazdaságtudományi Tanszék. 2010 június

23. Központi Statisztikai Hivatal (2020): Módszertan - Fogyasztói árak. www.ksh.hu/docs/hun/modszgyors/farmodsz20.html
24. Lakatos Miklós (2008): Beszélgetés Szilágyi Györggyel. In: Statisztikai Szemle 86. évf. 6. sz. p.614-620. 2008.06.hó
25. Márkusné Zsibók Zsuzsanna (2012): Az infláció és az árazási magatartás területi különbségei. doktori értekezés. Pécs, Pécsi Tudományegyetem 2012.
26. Marton Ádám (2006): Haan, J.de: Az árak hedonikus mérése közvetlen és közvetett időváltozóval.(könyvismertetés). In: Statisztikai Szemle 84. évf. 1. sz. p.96-98.
27. Milana, Carlo (2009): Solving the Index-Number Problem in a Historical Perspective. januar 2009. EUKLEMS project
28. Olexó Tünde (2019): Új fittségi jellemzők keresése Omega-3 zsírsavak hatásainak elemzésére. VMTDK dolgozat, 2019.
29. Olexó Tünde (2020): Árindexelmélet: Ki bukik meg a Covid-teszten?. TMDK dolgozat, Széchenyi István Egyetem Győr, 2020.
30. Olexó Tünde (2020): Mi történt veletek kedves árak? 2d-szelektor eljárás alkalmazása a koronavírus árnyékában. TMDK dolgozat, Széchenyi István Egyetem Győr, 2020.
31. Pásztor Márta Zsuzsanna – Ugrósd György – Villányi Judit (2017): A fogyasztói árstatisztika adatgyűjtésének módjai. Budapest, KSH 2017 szept.
32. Reinsdorf, Marshall (2006): Axiomatic Price Index Theory. 2006. május
33. Szigeti Judit (2012): Jóléti hatások vizsgálata a magyar élelmiszerfogyasztók körében. Doktori értekezés Budapest, Budapesti Corvinus Egyetem, 2012.
34. Szilágyi György (2002): Indexek és nemzeti számlák. In: Statisztikai szemle 80. évf. 1. szám p.5-21. 2002.
35. United Nations (2018): Classification of Individual Consumption According to Purpose (COICOP) 2018. New York, 2018.
36. Xi, Wendy Wusan (2006): Vector based price index. Economic Approach. Ottawa Group. Ninth Meeting, London 2006. 38 p.
37. IMF (2020): Consumer Price index Manual
<https://www.imf.org/en/Data/Statistics/cpi-manual>