

KLÍMAINDEXEK, NAPTEVÉKENYSÉG ÉS A HAZAI IDŐJÁRÁS ÖSSZEFÜGGÉSEI

TDK DOLGOZAT

Írta: Gombár Tamás

Matematika BSc

Alkalmazott matematikus szakirány

Témavezető:

Márkus László

egyetemi docens

Valószínűségelméleti és Statisztika Tanszék



Eötvös Loránd Tudományegyetem

Természettudományi Kar

2011

Kivonat

Diplomamunkámban különböző összefüggéseket keresek a Föld és Magyarország klímáját befolyásoló tényezők között. A módszertani eszközöket az idősorelemzésből merítettem. Az általam felhasznált adatok legnagyobb része az interneten szabadon hozzáférhető. A legfontosabb ilyen adatok: Magyarország hőmérséklete, napfoltszám-index, Észak-atlanti oszcillációs index, NOI-index, a Tisza vízhozama. A vizsgált idősorok legnagyobb része havi felbontású. A statisztikai elemzéshez az **R** programcsomagot használtam. A klímakutatás manapság a természettudomány egyik leginkább pezsgő és legjobban vitatott témája. A Föld klímája egy mérhetetlenül komplex rendszer, emiatt a globális felmelegedés vizsgálata rendkívül bonyolult feladat. Az ezirányú kutatás egyik legjelentősebb projektje az 1988-ban az ENSZ által alapított Intergovernmental Panel on Climate Change (IPCC). Az IPCC 130 ország 2500 kutatóját fogja össze, akik átlagosan hétévente hoznak nyilvánosságra egy közös jelentést a klímaváltozás mértékét illetően. Az IPCC-t 2007-ben Nobel-békedíjjal tüntették ki.

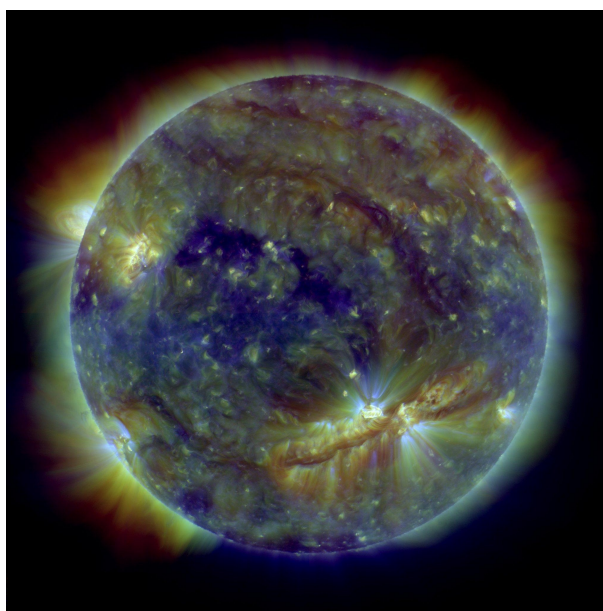
Az általam végzett munka mélysége és természete folytán a klímaváltozást illetően nem áll módomban állást foglalni. Szakdolgozatom célja sokkal inkább, hogy felvázolja az idősorok révén történő klímakutatás lehetőségeit és főbb módszereit.

Tartalomjegyzék

Bevezetés	1
1. Napfoltok, meteorológia, indexek	1
1.1. Napfoltok	1
1.1.1. A 11-éves (Schwabe-) ciklus (P_0)	3
1.1.2. A 103-éves (Gleissberg-)ciklus	5
1.2. Magyarország klímája	5
1.3. Észak-atlanti oszcilláció(NAO)	5
2. Idősorok	7
2.1. Idősorok elmélete	8
2.1.1. Stacionárius idősorok	11
2.2. Többdimenziós idősorok	13
2.3. Simítások	15
2.4. Spektrálanalízis	16
2.4.1. Periodogram és diszkrét Fourier-transzformáció	17
2.4.2. Spektrálsűrűség	20
2.4.3. A spektrum becslése	24
2.4.4. Vektorértékű stacionárius folyamat spektrál reprezentációja	24
3. Eredmények	28
3.1. Kutatások	28
3.2. Grafikonok	28
Irodalomjegyzék	32
Az elemzéshez használt R kód	35

1. fejezet

Napfoltok, meteorológia, indexek

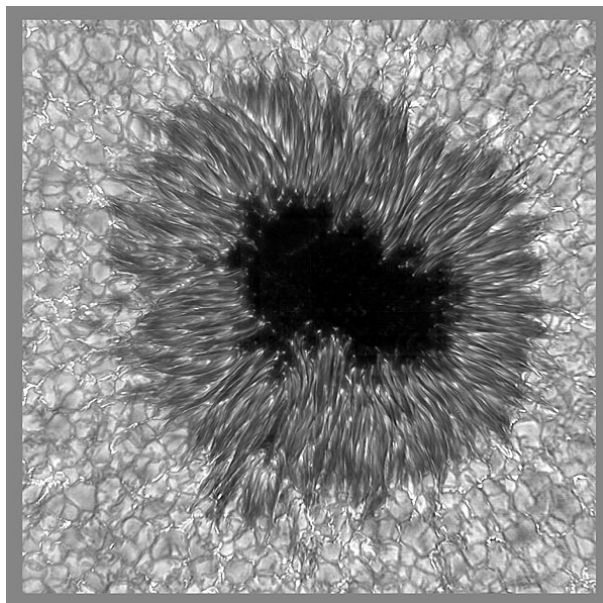


1.1. ÁBRA. Egy 2010 októberében készült ultraiobolya tartományban készült fénykép a Napról. Jól láthatók a napfoltok és környékükről származó napkitörések

1.1. Napfoltok

A napfoltok vizsgálatának kezdete a nyugati tudományban nem teljesen tisztázott. Feltételezik, hogy az ókori görög filozófus Anaxagorasz már szabad szemmel felfedezte őket. Később az irodalomban is több utalást találhatunk rájuk. 1607-ben egy "camera obscura" segítségével Johannes Kepler a Merkúr Nap előtti vonulását figyelte meg, és amit a Merkúrnak hitt, az valójában napfolt volt. A kínaiak több, mint kétezer éve ismerték a jelenséget. A tudományos igényű vizsgálatok Galileo Galilei és Thomas Harriot nevéhez fűződnek, akik először vizsgálták távcsövek segítségével a Napot 1610-től.

Galilei hatására a napfoltok vizsgálata nagyon gyors fejlődésnek indult. David Fabricius 1611-ben a napfoltok vándorlásának megfigyelésével a Nap tengely körüli forgásáról tudott következtetéseket levonni. Azt vette észre, hogy a nyugati oldalon való eltűnés után körülbelül 12 nappal a keleti oldalon felbukkantak ugyanazok a foltok. A napfoltok megismerésének úttörője Cristoph Schneier volt a 17. században. Kezdetben a Napot egy tökéletes képződménynek tekintette, és azt állította, hogy a foltok valójában csak nagyon alacsony pályán keringő objektumok. Később beletörődött, hogy a Nap mégsem annyira hibátlan, majd megírta Rosa Ursina című könyvét, mely több, mint 100 évig a téma legátfogóbb összefoglalásának számított. Ő számította ki, hogy a Nap forgástengelye 7° -os dőlésszöget mutat az ekliptika síkjához képest. A következő nagy áttörés Joseph von Fraunhofer hatására következett be 1817-ben, aki megkezdte a spektroszkópia alkalmazását a csillagászatban. Ennek segítségével a csillagászok az objektumok belső fizikai és kémiai tulajdonságait is vizsgálni tudták. Így állapították meg, hogy a foltok felszíne jóval hidegebb, mint a Napé általában.



1.2. ÁBRA. Egy napfolt

A napfoltok sötétebb foltok a Nap felszínén, melyeket koncentrált mágneses erőter okoz, ami megakadályozza, hogy a hő a Nap magjából teljes mértékben elérje a Nap felszínét.

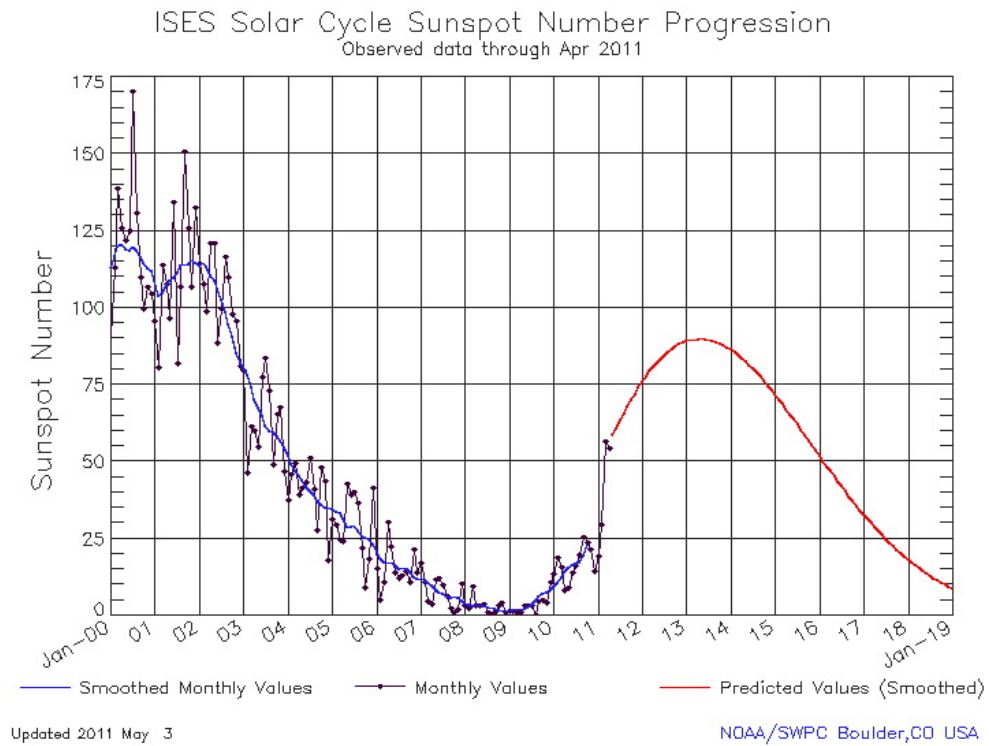
Régóta ismert tény, hogy a napfoltok szoros összefüggésben állnak a Nap mágneses terével. A napkitörések energiája a mágneses térből származik. Emiatt a mágneses tér viselkedése jól mutatja a Nap pillanatnyi aktivitását. Mivel a napfoltok pedig összefüggésben állnak a mágneses térrel, ezért segítségükkel előrejelezhető a mágneses tér viselkedése.

1.1.1. A 11-éves (Schwabe-) ciklus (P_0)

A napfoltok számában a tudósok semmi rendszert nem találtak egészen 1843-ig, amikor egy amatőr csillagász, Henrik Schwabe felfedezett egy körülbelül 10 éves periódust. Később ezt átlagos 10.8 évre módosították, ami valójában 9 és 11.5 év között ingadozik.

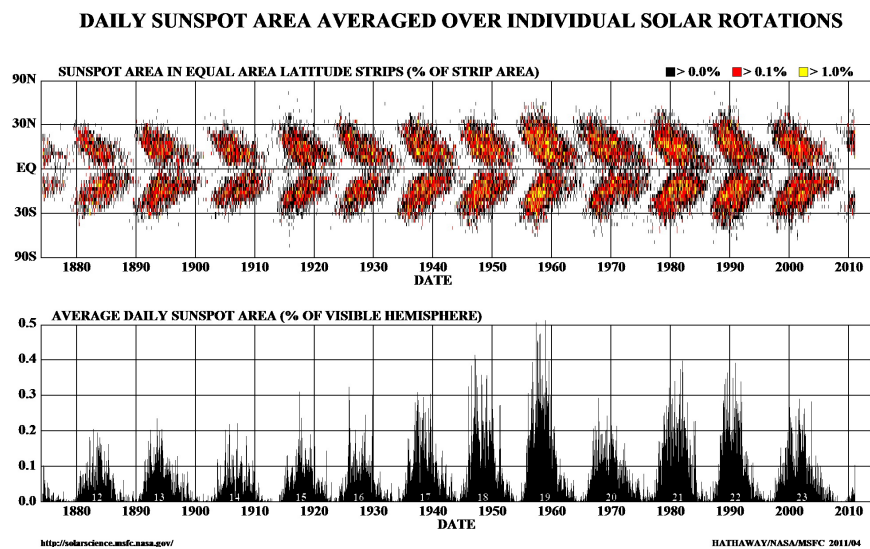
A napfolttevékenységről relatíve régóta vannak adataink. A napfoltszám idősorok 1700-tól elérhetőek. Szabványos, nemzetközi mérési adatok pedig 1755-től ismertek. 1700-tól 2008-ig 28 teljes ciklust regisztráltak. A megegyezés szerinti ciklusszámlálás 1755-ben kezdődik. Eszerint a 23. ciklus 2008-ban ért véget és jelenleg a 24. ciklusban tartunk. Az 1700-1755 közötti 5 darab ciklust A, B, C, D illetve E betűkkel jelölik.

A Schwabe-ciklusok vizsgálatánál fontos tényező az úgynevezett növekedési illetve csökkenési idők vizsgálata. A növekedési idő (t_u) egy ciklus kezdetétől a minimum és maximum felvétele között eltelt idő. A csökkenési idő pedig a maximum és a következő ciklus minimuma között eltelt idő. Az $Asy = t_u/t_d$ asszimmetria paraméter egy ciklus maximumainak és minimumainak szimmetriáját határozza meg. Ha $Asy = 1$, akkor a ciklus szimmetrikus. Ha $Asy < 1$, akkor balra tolódott, ha $Asy > 1$, akkor jobbra. A Schwabe-ciklusok asszimmetria paramétere átlagosan 0.71, szórása 0.40. Érdekes tény, hogy nemrégiben erős korrelációt találtak a ciklusok növekedési sebessége illetve az amplitúdók erőssége közt. Ez igen hasznos információkat tud adni a napfolttevékenység előrejelzéséhez.



1.3. ÁBRA. A 24. ciklus eddigi adatai és a napfolttevékenység előrejelzése

A ciklusok kezdetén a foltok általában a $\pm 30^\circ$ -os szélességi körökön bukkannak fel, majd lassan az egyenlítő felé vándorolnak. Az egyenlítőt elérve egyesülnek, és az új ciklus okozta mágneses pólusváltás hatására eltűnnek.



1.4. ÁBRA. A napfoltok időbeli vándorlását bemutató „pillangó diagram”

1.1.2. A 103-éves (Gleissberg-)ciklus

A napfoltok számának vizsgálata egyértelműen mutatja egy 103 éves úgynevezett hosszú vagy szekuláris ciklus létezését is. Gleissberg hívta fel rá először a figyelmet 1939-ben. A hosszú ciklus összefügg az úgynevezett nagy minimumokkal. Ezek közül a leghíresebb a Maunder-minimum, ami 1645-1715 között úgynevezett kis jégkorszakot okozott. Magas napfolttevékenység esetén az emberi üreszközök sokkal nagyobb veszélynek vannak kitéve. A napfoltok létrejöttét még nem értjük teljes mértékben, ugyanígy az eltűnésüket sem.

1.2. Magyarország klímája

A magyarországi időjárási idősorok az OMSZ közelmúltban nyilvánosságra hozott hőmérsékleti adatai. Az adatsorok az 1901-től 2000-ig tartó időszakot tartalmazzák 4 magyarországi városból. Ezek: Budapest, Szeged, Debrecen és Szombathely. Az ilyen hosszútávú idősoroknál nagyon komoly probléma a homogenitás kérdése. Egy meteorológiai idősort homogénnek nevezünk, ha az idősor viselkedésében történt változások kizárólag a klíma változásának tudhatók be. Sajnos a valóságban 100 éves időtartam alatt a mérési eredmények nem tudnak ugyanolyan pontosságúak maradni. Egy-egy régebbi mérőműszer akár néhány Celsius-fokos hibával is mérhetett. Ugyanígy a mérési körülmények is sokat változtak. Az urbanizáció miatt kialakultak ún. betonszigetek, melyeken szintén néhány fokos hőmérsékletemelkedés történt. Sok régi mérőállomást megszüntettek, illetve újabbakat is telepítettek. Mivel a klímakutatásban néhány tized Celsius-fokos eltérés is szignifikánsnak számít, ezért rendkívül fontos a meteorológiai adatok tisztítása, javítása. Ezeket az eljárásokat homogenizálásnak nevezik. Az OMSZ ezt a feladatot egy saját fejlesztésű algoritmussal végzi, ez a MASH (Multiple Analysis of Series for Homogenization). Az algoritmus különböző statisztikai módszerek keverékeként működik. Iterálva felhasznál interpolációs, hibajavító, hipotézisvizsgálati módszereket egyaránt. A felhasznált havi adatok az említett homogenizációs módszerrel tisztított adatsorok.

1.3. Észak-atlanti oszcilláció(NAO)

A NAO (North Atlantic Oscillation) index az észak-atlanti klimatikus fluktuáció mértékének egyik leghatékonyabb becslése. Értéke egyenlő Lisszabon, Portugália és Reykjavík, Izland felszíni légnyomásának különbségével. Felfezője Sir Gilbert Walker volt 1927-ben. Az izlandi állandó alacsony légnyomású illetve az Azori-szigetek környéki

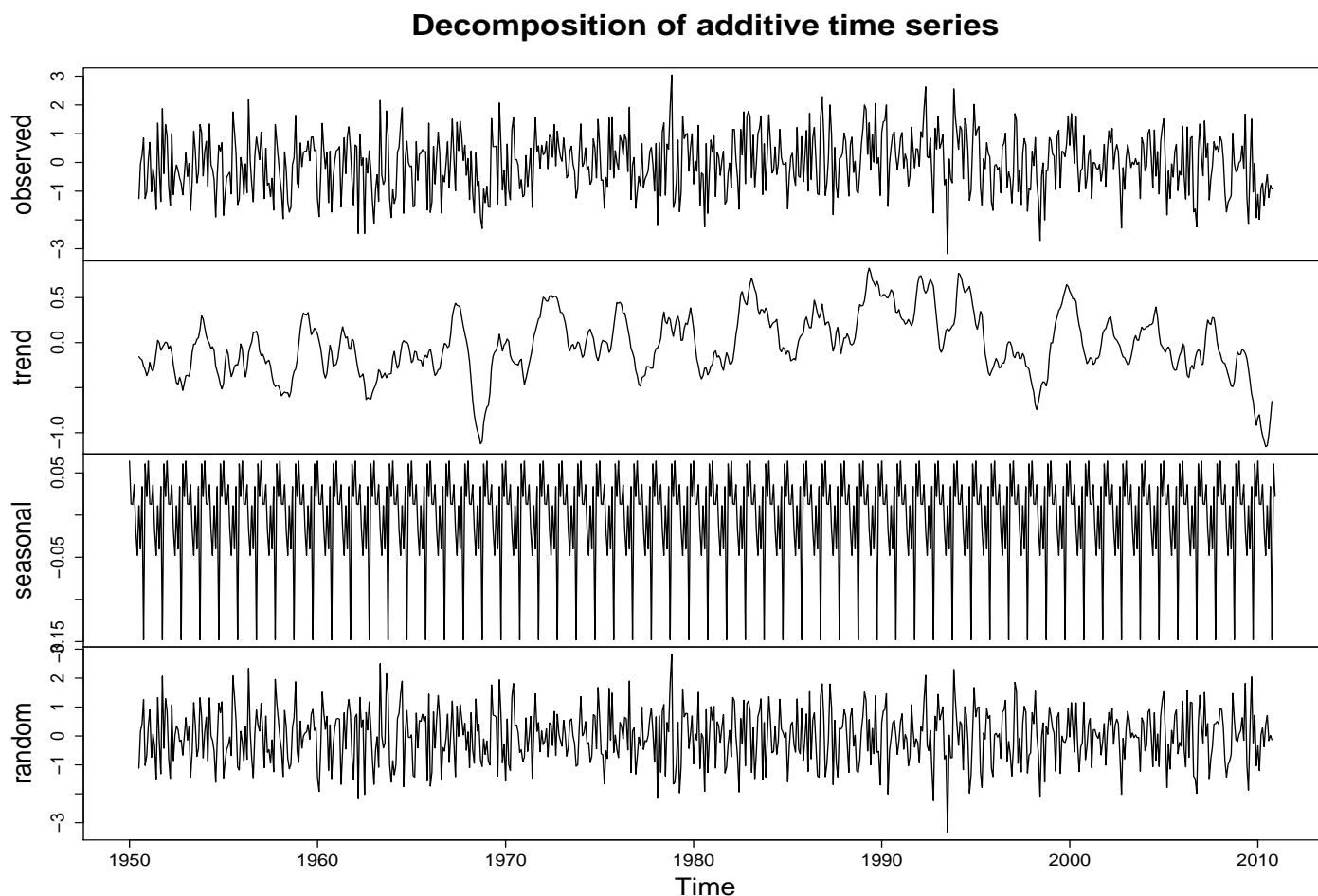
magas légnyomású területek közötti nyomáskülönbséget a NAO változásával lehet modellezni. Tapasztalatok alapján magas NAO érték esetén Európában hűvös nyarak és enyhe, csapadékos telek következnek. Alacsony NAO esetén viszont hideg telek, a Mediterrán-térségben pedig viharos időjárás jellemző. A 2009-es rendkívül hideg télen, amikor például Angliában 30 éves hőmérsékleti minimumot mértek, a NAO index szintén rendkívüli minimumot ért el. Egyes elméletek szerint a naptevékenység megváltozása hozható kapcsolatba a különleges hideggel.

2. fejezet

Idősorok

A gyakorlatban előforduló statisztikai mintavételek gyakran időben szorosan egymást követően történnek. Az értékeink ekkor természetesen szorosan össze fognak függni. Emiatt a megszokott korrelálatlanságot és azonos eloszlást feltételező módszereinket nem tudjuk használni. Az olyan statisztikai módszereket, melyek az effajta, a megfigyelések közelsége miatt korrelált változók tulajdonságait vizsgálja, idősoranalízisnek nevezzük. Az idősorok által leírt jelenségek egy része a valóságban folytonosan létező folyamat (pl. hőmérséklet), míg léteznek csak adott időpontokhoz rendelt idősorok (pl. csapadékmennyiség). Idősorokkal nagyon sok helyen foglalkoznak, ilyenek például a közgazdasági, pénzügyi, biológiai, szociológiai, meteorológiai kutatások.

Az idősorokról alkotott modern képet Udeny Yule 1927-ben megjelent cikkében alkotta meg. Ő a napfoltok hosszú idősorait vizsgálva olyan szabálytalanságokat talált, amelyeket véletlen hatásoknak tudott be. Ő vezette be azt a modelleképzelést, ami szerint az idősorok empirikus értékeit egy olyan elméleti, sztochasztikus idősor állítja elő, melyben három alapvető komponens érvényesül: egy alaptendencia, azaz *trend*, egy *szezonális*, ismétlődő komponens, illetve egy teljesen véletlenszerű *zaj*.

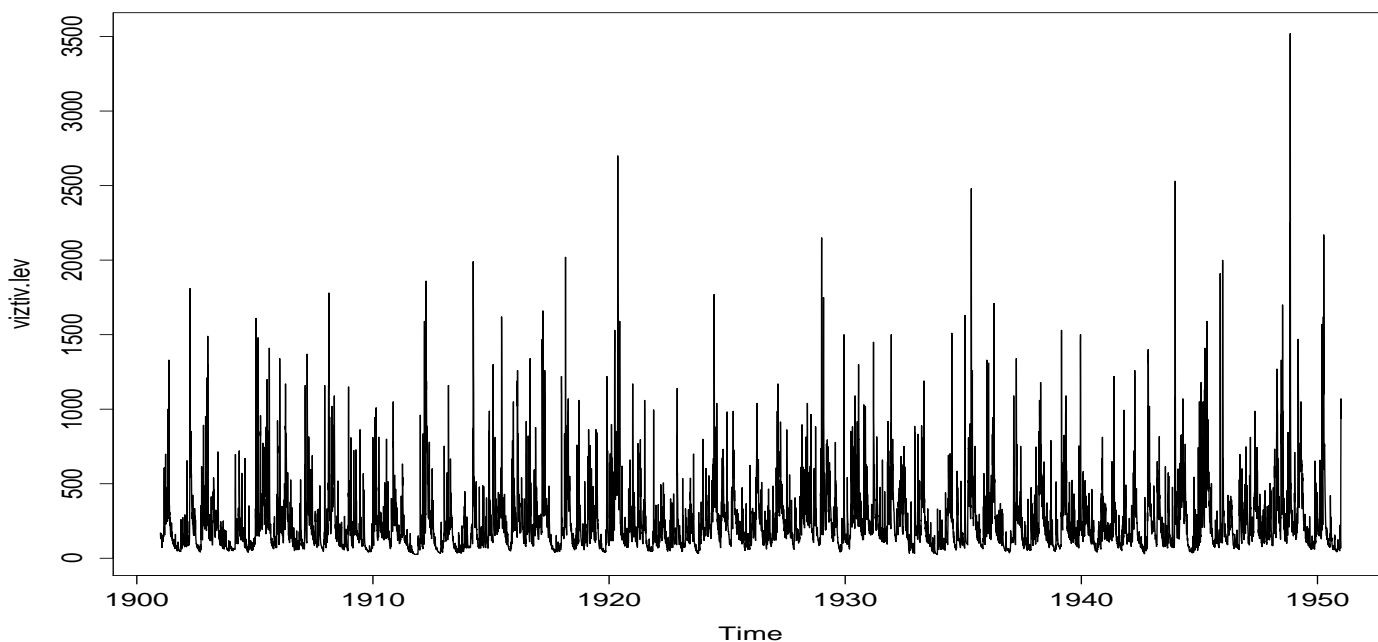


2.1. ÁBRA. A NAO index idősorának mozgóátlaggal történt felbontása periodikus, trend és stacionárius zaj komponensre

Az idősorok vizsgálatának többféle célja is lehet. Például hosszú meteorológiai idősorokból bizonyítékot próbálnak keresni a globális felmelegedésre. Másik alkalmazás, hogy periodikus komponenseket keresünk az idősorban - például agyhullám mérések során. Szintén rendkívül fontos feladat, hogy a múltbéli idősor alapján valamiféle jóslást adjunk a jövőbeli értékekre - részvények árfolyamára például.

2.1. Idősorok elmélete

1. *Definíció.* (**Idősor**) Idősornak nevezzük valószínűségi változók egy x_1, x_2, \dots, x_t sorozatát, ahol az index egy időváltozónak is megfeleltethető. Azt legtöbbször megköveteljük, hogy a mintavételek egyenlő időközönként legyenek.



2.2. ÁBRA. A Tisza tivadari vízhozamának időszora

2. *Definíció.* (**Várható érték**) Egy időszor t időpillanathoz tartozó várható értéke

$$\mu_t = E(x_t) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_t(x) dx \quad (2.1)$$

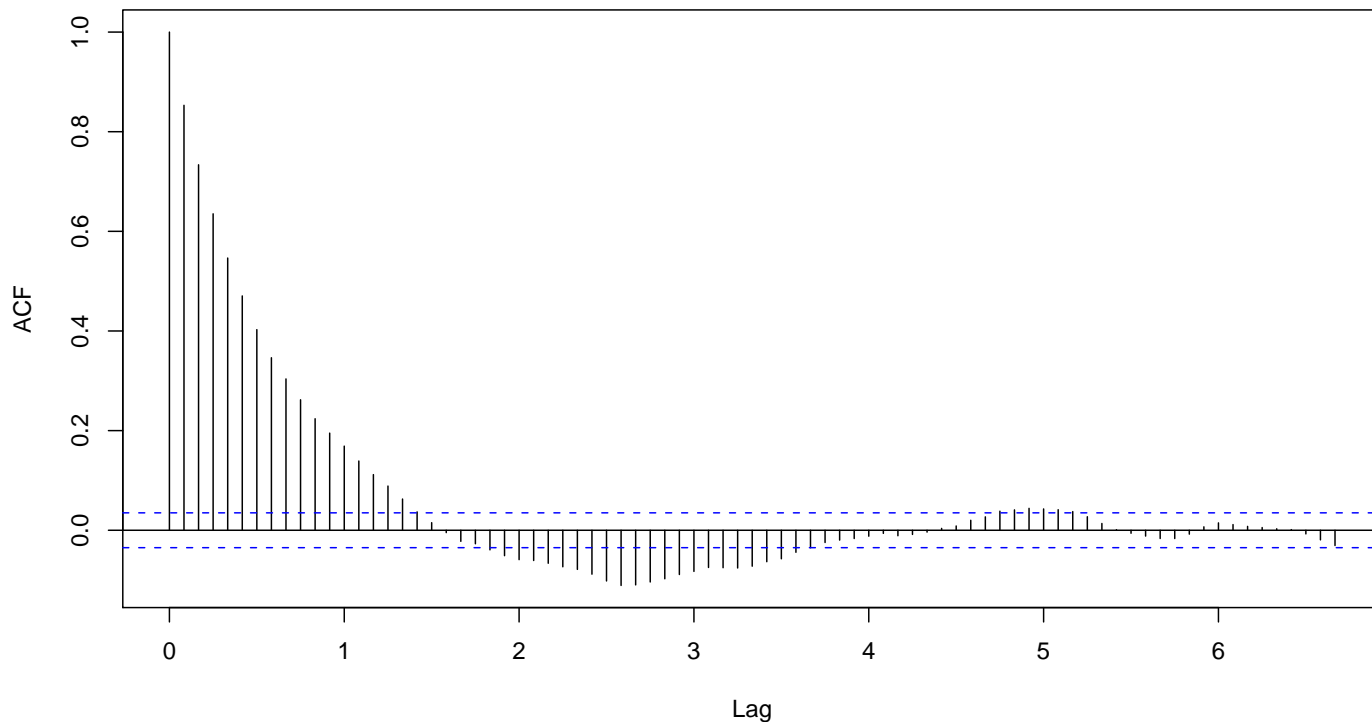
ahol f_t az x_t valószínűségi változó sűrűségfüggvénye.

3. *Definíció.* (**Autokovariancia**) Egy időszor autokovariancia függvényének nevezzük a

$$\gamma(s, t) = \text{cov}(x_t, x_s) = E[(x_s - \mu_s)(x_t - \mu_t)] \quad (2.2)$$

értéket. Ez lényegében az időszor két időpontja közti kovariancia.

Series sun.m.nr



2.3. ÁBRA. A napfolttevékenység autokovariancia függvénye

4. *Definíció.* (**Autokorreláció**) Egy idősor autokorrelációján a

$$\rho(s, t) = \frac{\gamma(s, t)}{\sqrt{\gamma(s, s)\gamma(t, t)}} \quad (2.3)$$

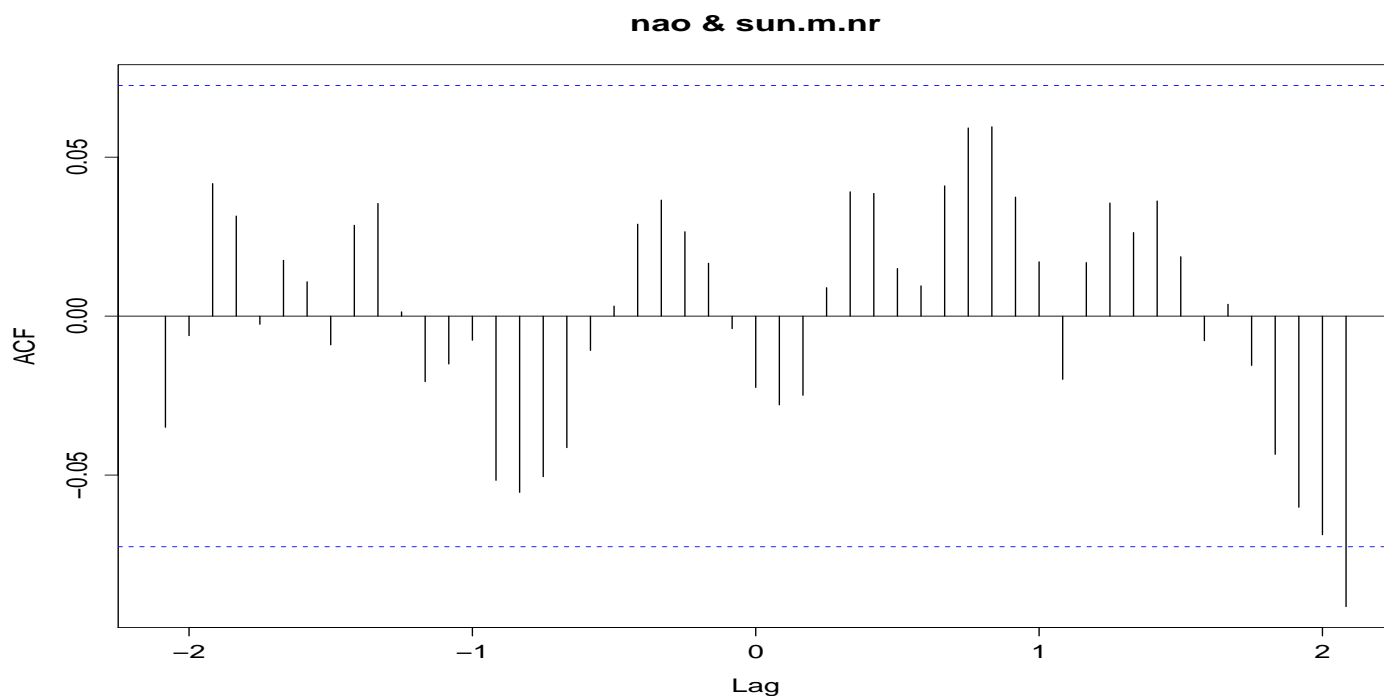
értéket értjük. Az autokovarianciához hasonlóan itt ez is az idősor két időpontjának korrelációját adja meg, azaz egy lineáris összefüggést határoz meg köztük. A Cauchy-Schwarz egyenlőtlenségből triviálisan következik az (auto)korrelációra a $-1 \leq \rho(s, t) \leq 1$ azonosság.

5. *Definíció.* (**Keresztkorreláció**) Két idősor keresztkorrelációján a

$$\rho_{xy}(s, t) = \frac{\gamma_{xy}(s, t)}{\sqrt{\gamma_x(s, s)\gamma_y(t, t)}} \quad (2.4)$$

értéket értjük, ahol $\gamma_{xy}(s, t) = E[(x_s - \mu_{x,s})(y_t - \mu_{y,t})]$.

A fent definiált függvények értékei egyaránt függenek s -től és t -től.



2.4. ÁBRA. Keresztkorreláció a NAO és a napfolttevékenység idősorai között

2.1.1. Stacionárius idősorok

6. *Definíció.* (**Erős stacionaritás**) Egy idősort erősen stacionáriusnak nevezünk, ha az idősor egy tetszőlegesen hosszú szeletének eloszlása megegyezik az idősor egy másik ugyanilyen szeletének eloszlásával. Formálisan

$$(x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_k}) \sim (x_{t_1+h}, x_{t_2+h}, \dots, x_{t_k+h}) \quad (2.5)$$

Tehát az idősor változói bármely részhalmazának többdimenziós eloszlásfüggvénye meg kell, hogy egyezzen a részhalmaz egy eltoltjának eloszlásfüggvényével.

7. *Definíció.* (**Gyenge stacionaritás**) Egy idősor gyengén stacionárius, ha μ_t nem függ t -től, és az autokovariancia függvény csak az $|s - t|$ értéktől függ.

A fenti definíciót felhasználva az autokovariancia függvényre:

$$\gamma(t + h, t) = E[(x_{t+h} - \mu)(x_t - \mu)] = E[(x_h - \mu)(x_0 - \mu)] = \gamma(h, 0) \quad (2.6)$$

A korábbi definíciókat átírva a stacionárius esetre:

8. *Definíció.* (**Autokovariancia stacionárius esetben**)

$$\gamma(h) = \text{cov}(x_t, x_s) = E[(x_{t+h} - \mu)(x_t - \mu)] \quad (2.7)$$

9. *Definíció.* (**Autokorreláció stacionárius esetben**)

$$\rho(s, t) = \frac{\gamma(t+h, t)}{\sqrt{\gamma(t+h, t+h)\gamma(t, t)}} = \frac{\gamma(h)\gamma(0)}{\gamma(0)^2} \quad (2.8)$$

10. *Definíció.* (**Keresztkorreláció stacionárius esetben**)

$$\rho_{xy}(s, t) = \frac{\gamma_{xy}(h)}{\sqrt{\gamma_x(0)\gamma_y(0)}} \quad (2.9)$$

A fenti definíciók tapasztalati megfelelője is felírható:

11. *Definíció.* (**Tapasztalati autokovariancia függvény**)

$$\hat{\gamma} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-h} (x_{t+h} - \bar{x})(x_t - \bar{x}) \quad (2.10)$$

Ahol $\hat{\gamma}(-h) = \hat{\gamma}(h)$ minden $h = 0, 1, \dots, n-1$

Meg kell jegyeznünk, hogy az összegzés csak $t+h > n$ -re történik, mivel x_{t+h} csak itt értelmezett. Az osztás mégis n -nel történik, mivel ez biztosítja számunkra, hogy az autokovariancia pozitív szemidefinit lesz. Igazolható, hogy függetlenül attól, hogy n -nel vagy $n-h$ -val osztunk, aszimptotikusan torzítatlan becslést fogunk kapni $\gamma(h)$ -ra.

12. *Definíció.* (**Tapasztalati autokorreláció függvény**)

$$\hat{\rho}(h) = \frac{\hat{\gamma}(h)}{\hat{\gamma}(0)} \quad (2.11)$$

13. *Definíció.* (**Tapasztalati keresztkovariancia függvény**)

$$\hat{\gamma}_{xy}(h) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-h} (x_{t+h} - \bar{x})(y_t - \bar{y}) \quad (2.12)$$

Ha h negatív, $\hat{\gamma}_{xy}(-h) = \hat{\gamma}_{yx}(h)$

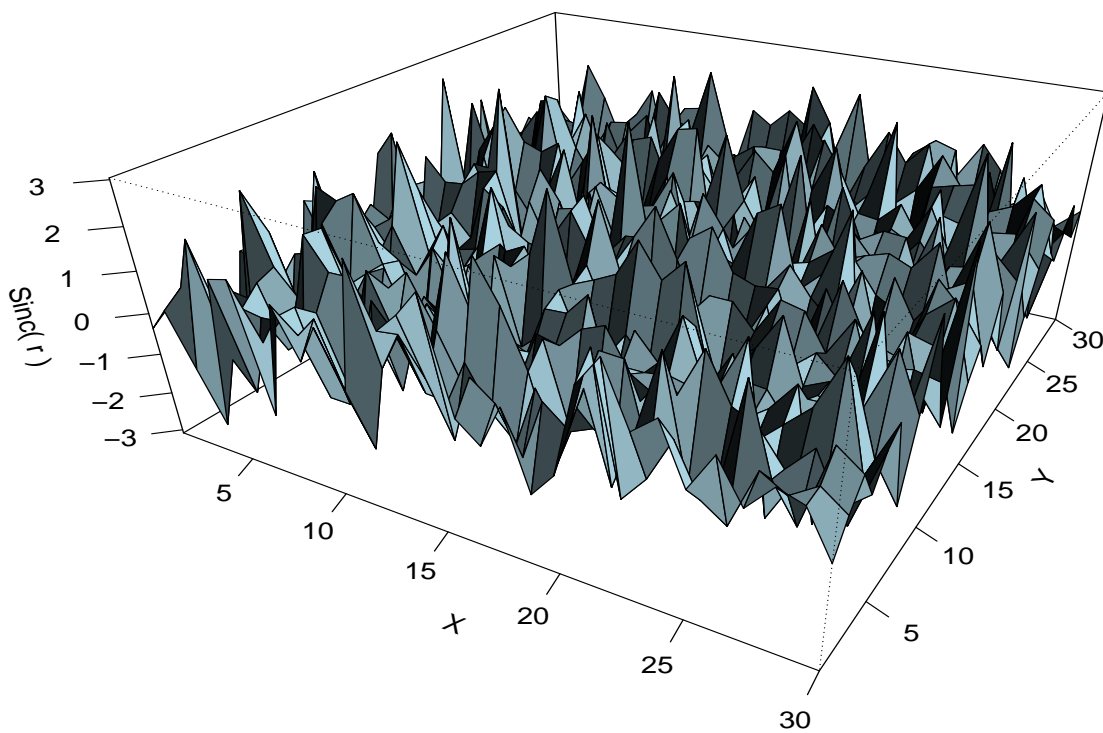
14. *Definíció.* (**Tapasztalati keresztkorreláció függvény**)

$$\hat{\rho}(h) = \frac{\hat{\gamma}_{xy}(h)}{\sqrt{\hat{\gamma}_x(0)\hat{\gamma}_y(0)}} \quad (2.13)$$

15. *Definíció.* (**Fehér zaj**) Fehér zajnak nevezzük a korrelálatlan 0 várható értékű, véges szórású idősorokat. Ezeknek az idősorok analízisében fontos szerepük van. A fehér zaj a mérnöki alkalmazásokból kapta a nevét. Fehér zajjal találkozunk például a sistergő rádióadásban.

2.2. Többdimenziós idősorok

Gyakran több idősor viselkedését egyidejűleg kell vizsgálnunk. Ilyenkor kézenfekvő vektorértékű idősorokat definiálnunk. Egy p dimenziós idősort az $\mathbf{x}_t = (x_{t1}, x_{t2}, \dots, x_{tp})^T$ alakban adunk meg, ahol x_{ti} egydimenziós idősor.



2.5. ÁBRA. Kétdimenziós standard normális fehér zaj

A $\mu = E(\mathbf{x}_t)$ várható értéket a $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p)^\top$ módon adjuk meg.
Az autokovariancia függvény:

$$\Gamma(h) = E[(\mathbf{x}_{t+h} - \mu)(\mathbf{x}_t - \mu)^\top] \quad (2.14)$$

ahol a $\Gamma(h)$ mátrix elemei a

$$\gamma_{ij}(h) = E[(x_{t+h,i} - \mu_i)(x_{tj} - \mu_j)] \quad (2.15)$$

keresztkovariancia függvények. A $\gamma_{ij}(h) = \gamma_{ji}(-h)$ azonosság miatt $\Gamma(-h) = (\Gamma(h))^\top$.
A fenti függvények tapasztalati megfelelői ugyancsak megkaphatók az egydimenzióssal analóg módon:

$$\bar{\mathbf{x}} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \mathbf{x}_t \quad (2.16)$$

$$\hat{\Gamma}(h) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-h} (\mathbf{x}_{t+h} - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_t - \bar{\mathbf{x}})^\top \quad (2.17)$$

16. *Definíció.* (**p-rendű autoregressziós folyamat (AR(p))**) Legyen x_t stacionárius folyamat, $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ nemnulla konstansok, w_t normális eloszlású fehér zaj, nulla várható értékkel és σ_w^2 szórással. Ekkor a p -rendű autoregresszív folyamat:

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \dots + \phi_p x_{t-p} + w_t \quad (2.18)$$

x_t várható értéke nulla. Amennyiben x_t várható értéke mégsem nulla, akkor a képletbe x_t helyett $x_t - \mu$ -t írva:

$$x_t = \phi_1(x_{t-1} - \mu) + \phi_2(x_{t-2} - \mu) + \dots + \phi_p(x_{t-p} - \mu) + w_t \quad (2.19)$$

Másképp:

$$x_t = \alpha + \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \dots + \phi_p x_{t-p} + w_t, \quad (2.20)$$

ahol $\alpha = \mu(1 - \phi_1 - \dots - \phi_p)$

2.3. Simítások

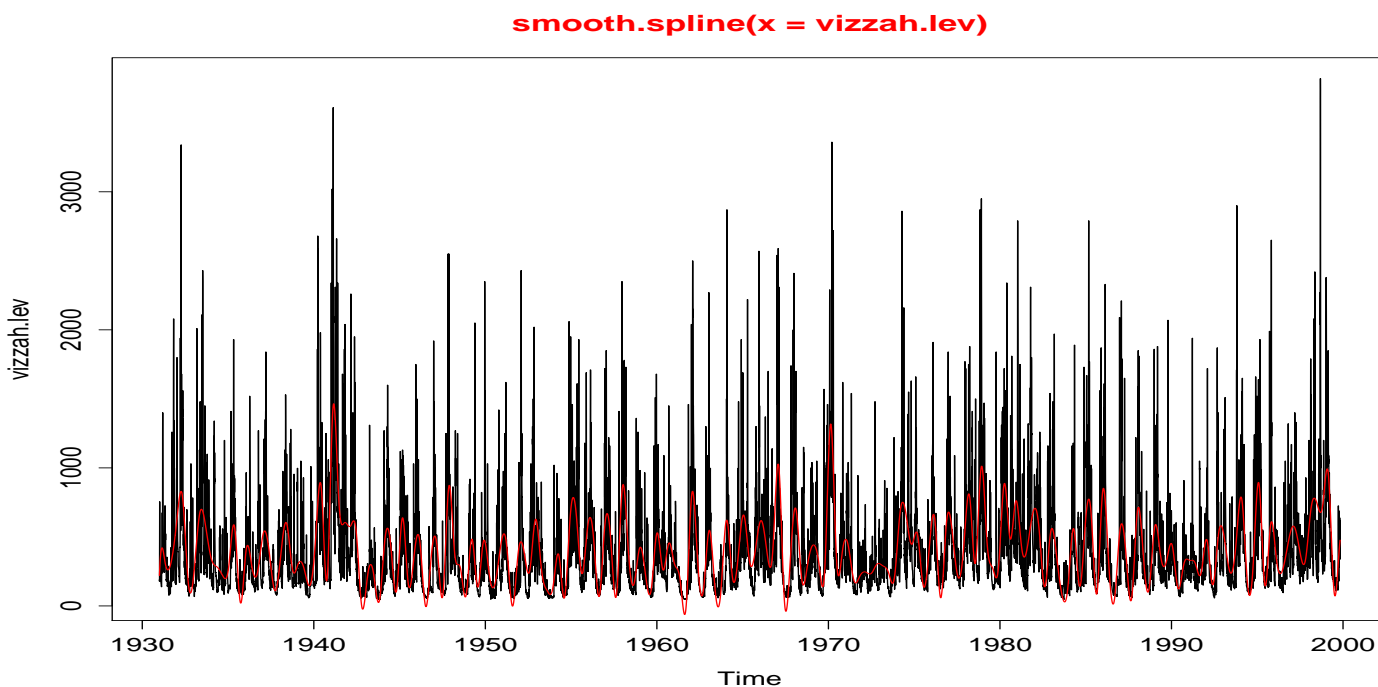
Az idősorok gyakran tartalmaznak hirtelen változásokat, kiugrásokat, egyenetlenségeket. Sok statisztikai módszer érzékeny ezekre a hirtelen kiugrásokra, melyek jelentősége viszont elhanyagolható. Emiatt különböző módszerek léteznek egy idősor simítására. Ezek közül mutatunk be most néhányat.

17. *Definíció.* (**Mozgóátlag simítás**) Ez a legegyszerűbb simítási módszer. Lényege, hogy az idősor egy pontja helyére vele szomszédos pontok egy adott súlyozás szerinti átlagát írjuk. A mozgóátlagolt folyamat:

$$m_t = \sum_{j=-k}^k a_j x_{t-j} \quad (2.21)$$

ahol $a_j = a_{-j} \geq 0$ és $\sum_{j=-k}^k a_j = 1$.

Az ilyen mozgóátlagok alkalmasak a periódusok kiszűrésére egy idősorból. Például egy meteorológiai idősort éves intervallumon mozgóátlagolva kiszűrhető az évszakok váltakozása, és ezután könnyebben kereshető benne trend.



2.6. ÁBRA. A záhonyi vízhozam harmadfokú spline simítása

A felettebb simítási technikák az idősort $x_t = f_t + y_t$ alakban közelítik, ahol f egy sima függvény, y_t pedig egy stacionárius idősor.

18. *Definíció.* (**Magfüggvényes simítás**) Ez is egy mozgóátlagos simítás, ami egy súly- vagy magfüggvény alapján súlyozza a különböző értékeket.

Ilyen például a Nadaraya-Watson becslés:

$$f_t = \sum_{i=1}^n w_t(i) x_t \quad (2.22)$$

ahol

$$w_t(i) = K\left(\frac{t-i}{b}\right) \sum_{j=1}^n K\left(\frac{t-j}{b}\right) \quad (2.23)$$

A $K(\cdot)$ az úgynevezett magfüggvény, aminek leggyakrabban a standard normális eloszlás sűrűségfüggvényét választjuk. A simítás mértékét a b paraméterrel tudjuk meghatározni, mely a simított intervallum szélességét adja meg.

19. *Definíció.* (**Spline simítások**) A spline interpoláció lényege, hogy nem pusztán az interplációs polinomok egyes pontokban felvett értékére adunk feltételeket, hanem azok deriváltjaira is az intervallumok szélein. Az eljárás során először felosztjuk a $t = 1, 2, \dots, n$ intervallumot k darab részintervallumra, t_i osztópontokkal, melyek $[t_i + 1, t_{i+1}]$ alakúak. A t_i értékeket csomóknak nevezzük. Ezután minden részintervallumban egy regressziót illesztünk a sorra. Általában ennek rendje $p = 3$. A módszer lényege, hogy egy harmadfokú spline függvényt keres, a fent definiált csomókkal és intervallumokkal, melyre

$$\sum_{t=1}^n [x_t - f_t]^2 + \lambda \int (f_t'')^2 dt \quad (2.24)$$

minimális. Itt λ paraméter adja a simítás fokát.

2.4. Spektrálanalízis

A klasszikus statisztikai mintáktól eltérően az idősorokban sokszor valamilyen ismétlődés vagy rendszer mutatkozik, melyet szeretnénk felfedezni matematikai módszerekkel. Erre kiválóan alkalmas a Fourier-analízis, melynek segítségével trigonometrikus függvényekből álló sorral közelítjük az idősort. Célunk, hogy

$$x_t = \sum_{k=1}^n [U_{k_1} \cos(2\pi\omega_k t) + U_{k_2} \sin(2\pi\omega_k t)] \quad (2.25)$$

alakban reprezentáljuk a folyamatunkat, ahol U_{k_1}, U_{k_2} minden $k = 1, 2, \dots, n$ számra független, 0 várható értékű, σ_k^2 szórású valószínűségi változók, ω_k pedig egy adott periódus frekvenciája.

Ekkor az U_{k_i} változók függetlenségét kihasználva az autokovariancia függvény felírható az alábbi alakban:

$$\gamma(h) = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2 \cos(2\pi\omega_k h) \quad (2.26)$$

Láthatjuk, hogy az autokovariancia függvény szórásokkal súlyozott periodikus komponensek összege. Stacionárius folyamatról lévén szó, x_t várható értéke 0. Emiatt a szórásra teljesül:

$$\gamma(0) = E(x_t^2) = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2 \quad (2.27)$$

tehát a teljes szórásnégyzet a komponensek szórásnégyzeteinek összegeként adódik.

2.4.1. Periodogram és diszkrét Fourier-transzformáció

20. *Definíció.* (**Diszkrét Fourier-transzformáció(DFT)**) Az x_1, \dots, x_n mintához tartozó diszkrét Fourier-transzformált:

$$d(\omega_j) = n^{-1/2} \sum_{t=1}^n x_t e^{-2\pi i \omega_j t} \quad (2.28)$$

ahol $j = 0, 1, \dots, n-1$, az $\omega_j = j/n$ frekvenciákat pedig Fourier-frekvenciáknak nevezjük.

21. *Definíció.* (**Inverz Diszkrét Fourier-transzformáció**)

$$x_t = n^{-1/2} \sum_{j=0}^{n-1} d(\omega_j) e^{2\pi i \omega_j t} \quad (2.29)$$

ahol $t = 1, 2, \dots, n$.

22. *Definíció.* (**Periodogram**) Az x_1, \dots, x_n mintához tartozó periodogram:

$$I(\omega_j) = |d(\omega_j)|^2 \quad (2.30)$$

ahol $j = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

23. *Definíció.* (**Skálázott periodogram**) Az x_1, \dots, x_n mintához tartozó skálázott periodogram:

$$P(j/n) = \frac{2}{n} \left(\sum_{k=1}^n x_k \cos(2\pi t j/n) \right)^2 + \frac{2}{n} \left(\sum_{k=1}^n x_k \sin(2\pi t j/n) \right)^2 \quad (2.31)$$

ahol $j = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Megjegyezzük, hogy $I(0) = n\bar{x}^2$, ahol \bar{x} a tapasztalati várható érték. Továbbá, mivel $\sum_{t=1}^n e^{-2\pi i\omega_j t} = 0$, ha $j \neq 0$, a DFT felírható:

$$d(\omega_j) = n^{-1/2} \sum_{t=1}^n (x_t - \bar{x}) e^{-2\pi i\omega_j t} \quad (2.32)$$

A $h = t - s$ helyettesítéssel a periodogram pedig:

$$\begin{aligned} I(\omega_j) &= |d(\omega_j)|^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \sum_{s=1}^n (x_t - \bar{x})(x_s - \bar{x}) e^{-2\pi i\omega_j(t-s)} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{h=-(n-1)}^{n-1} \sum_{t=1}^{n-|h|} (x_{t+|h|} - \bar{x})(x_t - \bar{x}) e^{-2\pi i\omega_j h} \\ &= \sum_{h=-(n-1)}^{h=n-1} \hat{\gamma}(h) e^{-2\pi i\omega_j h} \end{aligned} \quad (2.33)$$

Gyakran kényelmesebb a DFT valós és imagináris komponenseivel külön-külön foglalkozni. Emiatt bevezetjük az alábbi függvényeket:

24. *Definíció.* (**Koszinusz és szinusz transzformáció**) Legyen adott x_1, \dots, x_n minta. Ekkor a **koszinusz transzformált**:

$$d_c(\omega) = n^{-1/2} \sum_{t=1}^n x_t \cos(2\pi\omega_j t) \quad (2.34)$$

A **szinusz transzformált** pedig:

$$d_s(\omega) = n^{-1/2} \sum_{t=1}^n x_t \sin(2\pi\omega_j t) \quad (2.35)$$

ahol $\omega_j = j/n$ minden $j = 0, 1, \dots, n-1$ értékre. Ekkor a Fourier-transzformált előáll:

$$d(\omega_j) = d_c(\omega_j) - i d_s(\omega_j) \quad (2.36)$$

a periodogram pedig:

$$I(\omega_j) = d_c^2(\omega_j) + d_s^2(\omega_j) \quad (2.37)$$

Az alábbiakban a periodogram néhány fontos tulajdonságára derítünk fényt. Kezdetnek legyen x_t egy μ várható értékű stacionárius folyamat, melynek $\gamma(h)$ autokovariancia függvényére és $f(\omega)$ spektrálsűrűségére is teljesül az abszolút összegezettség feltétele.

Ekkor \bar{x} helyére μ -t írva:

$$I(\omega_j) = \frac{1}{n} \sum_{h=-(n-1)}^{n-1} \sum_{t=1}^{n-|h|} (x_t - \mu)(x_{t+h} - \mu) e^{-2\pi i \omega_j h} \quad (2.38)$$

ahol $\omega_j \neq 0$ elemi frekvencia. A várható érték:

$$E[I(\omega_j)] = \sum_{h=-(n-1)}^{n-1} \left(\frac{n-|h|}{n} \right) \gamma(h) e^{-2\pi i \omega_j h} \quad (2.39)$$

Ezután választunk egy elemi frekvenciasorozatot $\omega_{j:n}$ -t és egy $\omega \neq 0$ frekvenciát, amikre $\omega_{j:n} \rightarrow \omega$ teljesül $n \rightarrow \infty$ esetén. Ekkor:

$$E[I(\omega_{j:n})] \rightarrow f(\omega) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma(h) e^{-2\pi i \omega h} \quad (2.40)$$

ha $n \rightarrow \infty$. Összefoglalva $\gamma(h)$ abszolút összegezhető, akkor a spektrálsűrűség előáll a periodogram egy hosszú időintervallumon vett átlagaként.

Most a periodogram aszimptotikus tulajdonságait fogjuk vizsgálni. A konvergencia teljesüléséhez tegyük fel, hogy a kovariancia függvényre teljesül:

$$\theta = \sum_{h=-\infty}^{\infty} |h| |\gamma| < \infty \quad (2.41)$$

Ezután a transzformációk és a kovariancia definíciójából felírhatók a transzformáltak közti kovarianciák:

$$\text{cov}[d_c(\omega_j), d_c(\omega_k)] = \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n \gamma(s-t) \cos(2\pi \omega_j s) \cos(2\pi \omega_k t) \quad (2.42)$$

$$\text{cov}[d_c(\omega_j), d_s(\omega_k)] = \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n \gamma(s-t) \cos(2\pi \omega_j s) \sin(2\pi \omega_k t) \quad (2.43)$$

$$\text{cov}[d_s(\omega_j), d_s(\omega_k)] = \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n \gamma(s-t) \sin(2\pi \omega_j s) \sin(2\pi \omega_k t) \quad (2.44)$$

Ezután megmutatható, hogy $\omega_j, \omega_k \neq 0, 1/2$ esetén teljesülnek:

$$\text{cov}[d_c(\omega_j), d_c(\omega_k)] = \begin{cases} f(\omega_j)/2 + \epsilon_n, & \omega_j = \omega_k \\ \epsilon_n, & \omega_j \neq \omega_k \end{cases} \quad (2.45)$$

$$\text{cov}[d_s(\omega_j), d_s(\omega_k)] = \begin{cases} f(\omega_j)/2 + \epsilon_n, & \omega_j = \omega_k \\ \epsilon_n, & \omega_j \neq \omega_k \end{cases} \quad (2.46)$$

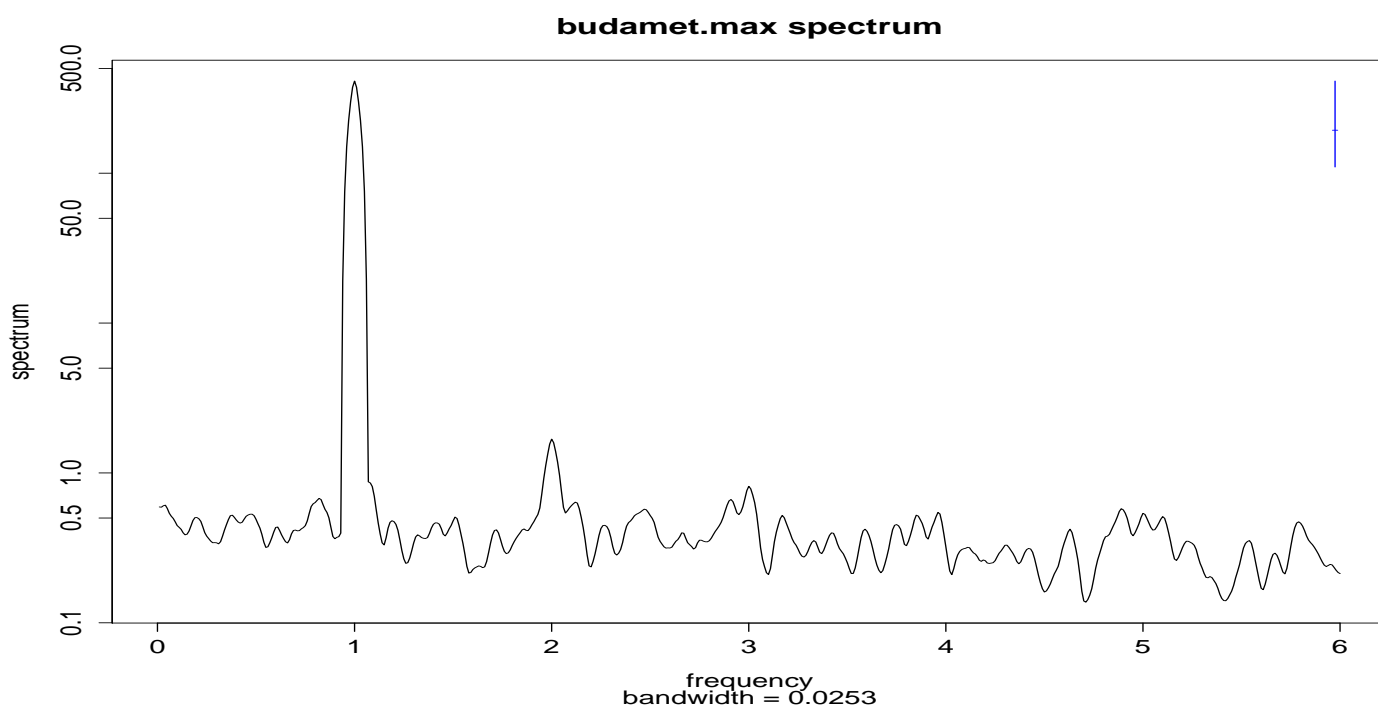
illetve

$$\text{cov}[d_c(\omega_j), d_s(\omega_k)] = \epsilon_n \quad (2.47)$$

ahol a hibatag

$$|\epsilon_n| \leq \frac{\theta}{n} \quad (2.48)$$

2.4.2. Spektrálsűrűség



2.7. ÁBRA. A budapesti maximum hőmérsékletek spektruma. Jól látható az éves periódushoz tartozó kiugrás

Spektrál reprezentációs tétel Az alábbiakban egy stacionárius folyamat spektrál reprezentációját vizsgáljuk, azaz az x_t folyamatot véletlen változós szinusz és koszinusz függvények összegeként írjuk fel. A spektrálsűrűség függvény ($f(\omega)$) valójában egy adott frekvenciájú (ω) periódus jelenlétének erősségét adja meg az idősorban.

Legyen egy komplex értékű x_t sorozat 0 várható értékű és $\gamma_x(h) = E(x_{t+h}x_t^*)$ autokovariancia függvényű. Először általában pozitív szemidefinit függvényekre bizonyítjuk a spektrálfelbontás létezését, majd az autokovariancia ezen tulajdonságából következtünk az ő felbonthatóságára is.

Tétel: Az autokovariancia pozitív szemidefinit

Az autokovariancia pozitív szemidefinit, ugyanis tetszőleges a_t komplex számokra és $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ egészekre teljesül:

$$E \left| \sum_{s=1}^n a_s^* x_s \right|^2 = \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n a_s^* \gamma(s-t) a_t \geq 0. \quad (2.49)$$

Tétel:

Egy $\gamma(h)$, $h = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ akkor és csak akkor pozitív szemidefinit, ha felírható

$$\gamma(h) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{2\pi i \omega h} dF(\omega) \quad (2.50)$$

alakban, ahol $F(\cdot)$ monoton nemcsökkenő, jobbról folytonos, $[-1/2, 1/2]$ -en értelmezett. Teljesül továbbá: $F(-1/2) = 0$ és $F(1/2) = \gamma(0)$

Bizonyítás. Először tegyük fel, hogy $\gamma(h)$ felírható a fenti alakban. Ekkor valóban teljesül:

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n a_s^* \gamma(s-t) a_t &= \int_{-1/2}^{1/2} a_s^* \gamma(s-t) a_t e^{2\pi i \omega (s-t)} dF(\omega) \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} \left| \sum_{s=1}^n a_s e^{-2\pi i \omega s} \right|^2 dF(\omega) \\ &\geq 0 \end{aligned} \quad (2.51)$$

Tehát $\gamma(h)$ valóban pozitív szemidefinit. A másik irány bizonyításához tegyük fel, hogy $\gamma(h)$ pozitív szemidefinit és definiáljuk az alábbi, szintén nemnegatív értékű függvényt:

$$\begin{aligned} f_n(\omega) &= \frac{1}{n} \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n e^{-2\pi i \omega s} \gamma(s-t) e^{2\pi i \omega t} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{u=-(n-1)}^{(n-1)} (n - |u|) e^{-2\pi i \omega u} \gamma(u) \\ &\geq 0 \end{aligned} \quad (2.52)$$

Legyen $F_n(\omega)$ az $f_n(\omega)I_{(-1/2, 1/2]}$, (az f_n sűrűségfüggvény $(-1/2, 1/2]$ -re való megszorításának) eloszlásfüggvénye. Ekkor teljesülnek: $F_n(\omega) = 0$, ha $\omega \leq -1/2$ és $F_n(\omega) = F_n(1/2)$, ha $\omega \geq 1/2$.

Ekkor:

$$\begin{aligned} \int_{-1/2}^{1/2} e^{2\pi i \omega u} dF_n(\omega) &= \int_{-1/2}^{1/2} e^{2\pi i \omega u} f_n d\omega \\ &= \begin{cases} (1 - |u|/n)\gamma(u), & |u| < n \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.53)$$

F_n -re pedig teljesül:

$$\begin{aligned} F_n(1/2) &= \int_{-1/2}^{1/2} f_n(\omega) d\omega \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} \sum_{|u| < n} (1 - |u|/n)\gamma(u) e^{-2\pi i \omega u} d\omega \\ &= \gamma(0) \end{aligned} \quad (2.54)$$

Ekkor a Helly-féle konvergencia tétel miatt F_n -nek létezik F_{n_k} részsorozata, mely F -hez tart. A Helly-Bray-féle konvergencia tétel miatt pedig:

$$\int_{-1/2}^{1/2} e^{2\pi i \omega u} dF_{n_k}(\omega) \rightarrow \int_{-1/2}^{1/2} e^{2\pi i \omega u} dF(\omega) \quad (2.55)$$

ha jobboldalra felhasználjuk még, hogy

$$(1 - |u|/n_k)\gamma(u) \rightarrow \gamma(u), \quad (2.56)$$

ha $n_k \rightarrow \infty$.

Az alábbiakban a spektrál reprezentációs tétel stacionárius sorra vonatkozó verzióját mutatjuk be.

Tétel:

Ha x_t stacionárius folyamat 0 várható értékkel, $F(\omega)$ a korábbiaknak megfelelő spektráeloszlással, akkor létezik egy $z(\omega)$ komplex értékű sztochasztikus folyamat az $\omega \in [-1/2, 1/2]$ intervallumon, melynek növekménye stacionárius, korrelálatlan. Az x_t folyamat felírható az alábbi sztochasztikus integrálként:

$$x_t = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2\pi i t \omega} dz(\omega) \quad (2.57)$$

ahol $-1/2 \leq \omega_1 \leq \omega_2 \leq 1/2$

$$\text{var}(z(\omega_2) - z(\omega_1)) = F(\omega_2) - F(\omega_1) \quad (2.58)$$

A sztochasztikus integrál jelentése: Legyen $z(\omega)$ egy független növekményű 0 várható értékű, véges szórású, folytonos idejű sztochasztikus folyamat. Diszjunkt intervallumok között a folyamat viselkedése ekkor független. A $z(\omega)$ szerinti sztochasztikus integrált ekkor így definiáljuk:

Legyen $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n$ a $[-1/2, 1/2]$ intervallum egy diszjunkt felbontása. Definiáljuk:

$$I_n = \sum_{j=1}^n e^{-2\pi i t \omega_j} [z(\omega_j) - z(\omega_{j-1})]. \quad (2.59)$$

integrálközelítő összeget. Ekkor az

$$I = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2\pi i t \omega} dz(\omega) \quad (2.60)$$

sztochasztikus integrált, feltéve, hogy létezik, az I_n sorozat négyzetes várható értékbeli határértékeként definiáljuk, ha $n \rightarrow \infty$.

A tétel alapján egy stacionárius folyamat értelmezhető szinusz és koszinusz függvények szuperpozíciójaként. Általában a spektráeloszlás lehet folytonos és diszkrét eloszlások összege is. Most a $dF(\omega) = f(\omega)d\omega$ abszolút folytonos esettel foglalkozunk. Az előző tételben definiált

$$\sum_{h=-(n-1)}^{n-1} (1 - |h|/n) \gamma(h) e^{-2\pi i \omega h} \quad (2.61)$$

függvény határértékének meghatározásánál az $n \rightarrow \infty$ esetben problémába ütközhetünk, ha $\gamma(h)$ nem abszolút összegezhető. Amennyiben ez teljesül, akkor $f(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega)$ definícióval kapjuk a kívánt állítást.

Tétel:

Legyen $\gamma(h)$ egy stacionárius folyamat autokovarianciája. Teljesüljön továbbá:

$$\sum_{h=-\infty}^{\infty} |\gamma(h)| < \infty \quad (2.62)$$

Ekkor az x_t spektrálsűrűség felírható az alábbi alakban:

$$f(\omega) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} |\gamma(h)| e^{-2\pi i \omega h}. \quad (2.63)$$

2.4.3. A spektrum becslése

Először definiálunk egy \mathcal{B} frekvenciasávot, mely az $\omega_j = j/n$ frekvencia egy környezetében helyezkedik el.

$$\mathcal{B} = \left\{ \omega : \omega_j - \frac{m}{n} \leq \omega \leq \omega_j + \frac{m}{n} \right\}, \quad (2.64)$$

ahol $L = 2m + 1$ egy páratlan szám, amely úgy van megválasztva, hogy a \mathcal{B} -be eső frekvenciákra $f(\omega_j + k/n)$, $k = -m, \dots, m$ megközelítőleg $f(\omega)$ legyen. Ez valóban megtörténhet megfelelően nagy mintanagyság esetén. Ilyenkor a \mathcal{B} frekvenciasávban átlagolt periodogramot az alábbi módon definiáljuk:

$$\bar{f}(\omega) = \frac{1}{L} \sum_{k=-m}^m I(\omega_j + k/n) \quad (2.65)$$

Belátható, hogy amennyiben a spektrálsűrűség alig változik \mathcal{B} -ben, illetve n elég nagy, és $L \ll n$, akkor a periodogramok $f(\omega)\chi_{2L}^2/2$ eloszlásúak $0 < \omega < 1/2$ esetén. Mivel $L\bar{f}(\omega)$ felfogható L független $f(\omega)\chi_{2L}^2/2$ eloszlású valószínűségi változó összegeként, ezért elég nagy n -re:

$$\frac{2L\bar{f}(\omega)}{f(\omega)} \sim \chi_{2L}^2 \quad (2.66)$$

Egyik dolog, amire kíváncsiak vagyunk a spektrálbecslésekkel kapcsolatban, azok a konfidencia-intervallumok. Ezeket megkaphatjuk a fenti kifejezés átrendezésével. Legyen a becslés szintje $100(1 - \alpha)\%$, ekkor:

$$\frac{2L\bar{f}(\omega)}{\chi_{2L}^2(1 - \alpha/2)} \leq f(\omega) \leq \frac{2L\bar{f}(\omega)}{\chi_{2L}^2(\alpha/2)} \quad (2.67)$$

További fontos kérdés még a spektrum grafikus reprezentációjának vizsgálata. Gyakran a spektrumban a legnagyobb kiugrás kevésbé érdekes számunkra, mint a mellette lévő kisebb értékek. Mivel néha igen nehezen tudjuk ezeket felfedezni, gyakran ábrázoljuk inkább a spektrum logaritmusát a spektrum helyett. Ilyenkor a valódi $f(\omega)$ spektrumra, a korábbi feltételek mellett az alábbi a konfidencia-intervallum adódik:

$$[\ln \bar{f}(\omega) + \ln 2L - \ln \chi_{2L}^2(1 - \alpha/2), \ln \bar{f}(\omega) + \ln 2L - \ln \chi_{2L}^2(\alpha/2)] \quad (2.68)$$

2.4.4. Vektorértékű stacionárius folyamat spektrál reprezentációja

Az egydimenziós idősorok vizsgálata után felvetődik a többdimenziós idősorok periodicitásának vizsgálata is. A spektrál reprezentációs tételt több dimenzióra is könnyen általánosíthatjuk. Legyen $\mathbf{x}_t = (x_{t_1}, x_{t_2}, \dots, x_{t_p})^T$ többdimenziós stacionárius idősor.

Ekkor az

$$y_t = \sum_{j=1}^p a_j^* x_{tj} \quad (2.69)$$

szintén stacionárius, autokovariancia függvénye pedig:

$$\gamma_y(h) = \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^p a_j^* \gamma_{jk}(h) a_k \quad (2.70)$$

ahol $\gamma_{jk}(h)$ a klasszikus keresztkovariancia x_{tj} és x_{tk} között.

γ_{jk} spektrálfelbontásának előállításához először definiáljuk az alábbi triviálisan stacionárius sorokat:

$$y_{t1} = x_{tj} + x_{tk} \quad (2.71)$$

$$y_{t2} = x_{tj} + ix_{tk} \quad (2.72)$$

Ekkor a megfelelő autokovarianciák felírhatók:

$$\gamma_{y1}(h) = \gamma_j(h) + \gamma_{jk}(h) + \gamma_{kj}(h) + \gamma_j(h) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{2\pi i \omega h} dG_1(\omega) \quad (2.73)$$

$$\gamma_{y2}(h) = \gamma_j(h) + i\gamma_{jk}(h) - i\gamma_{kj}(h) + \gamma_j(h) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{2\pi i \omega h} dG_2(\omega) \quad (2.74)$$

Ezután felhasználva $\gamma_j(h)$ és $\gamma_k(h)$ spektrál reprezentációjának ismeretét következik:

$$\gamma_{jk}(h) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{2\pi i \omega h} dF_{jk}(\omega) \quad (2.75)$$

ahol

$$F_{jk}(\omega) = \frac{1}{2}[G_1(\omega) + iG_2(\omega) - (1+i)(F_j(\omega) + F_k(\omega))]. \quad (2.76)$$

Ezután feltéve az összegezhetőséget:

$$\sum_{h=-\infty}^{\infty} |\gamma_{jk}(h)| < \infty \quad (2.77)$$

γ_{jk} spektrál reprezentációját megkaphatjuk a

$$\gamma_{jk}(h) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{2\pi i \omega h} f_{jk}(\omega) d\omega \quad (2.78)$$

alakban. Ebből pedig a kereszt-spektrum sűrűségfüggvénye írható fel a Fourier-transzformált inverzéből:

$$f_{jk}(\omega) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma_{jk}(h) e^{-2\pi i \omega h} \quad (2.79)$$

A kereszt-kovariancia függvény kielégíti a $\gamma_{jk}(h) = \gamma_{kj}(-h)$ egyenlőséget, a fenti azonosságot felhasználva pedig: $f_{jk}(\omega) = f_{kj}(-\omega)$. Ezután már definiálhatjuk egy \mathbf{x}_t vektorértékű folyamat autokovariancia függvényét, mint egy $p \times p$ méretű mátrixot a

$$\Gamma(h) = E[(\mathbf{x}_{t+h} - \mu)(\mathbf{x}_t - \mu)^T] \quad (2.80)$$

alakban. Definiálva továbbá az $f(\omega) = \{f_{jk}(\omega), j, k = 1, \dots, p\}$ függvényt, a korábbi formulák felírhatók:

$$\Gamma(h) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{2\pi i \omega h} f(\omega) d\omega \quad (2.81)$$

illetve

$$f(\omega) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \Gamma(h) e^{-2\pi i \omega h}. \quad (2.82)$$

Az alábbiakban bemutatunk egy adott frekvenciához tartozó mérőszámot két sor közötti korrelációra - a koherenciát. A fenti eredményeket két dimenzióra felírva:

$$\gamma_{xy}(h) = E[(x_{t+h} - \mu_x)(y_t - \mu_y)] \quad (2.83)$$

$$\gamma_{xy}(h) = \int_{-1/2}^{1/2} f_{xy}(h) e^{-2\pi i \omega h} d\omega \quad (2.84)$$

Az f_{xy} függvényt kereszt-spektrumnak nevezzük, és az alábbi módon számoljuk:

$$f_{xy}(\omega) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma_{xy}(h) e^{-2\pi i \omega h} d\omega \quad (2.85)$$

Általánosan ez egy komplex értékű függvény, ami felírható

$$f_{xy}(\omega) = c_{xy}(\omega) - i q_{xy}(\omega) \quad (2.86)$$

alakban, ahol

$$c_{xy}(\omega) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma_{xy}(h) \cos(-2\pi \omega h) \quad (2.87)$$

illetve

$$q_{xy}(\omega) = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \gamma_{xy}(h) \sin(-2\pi\omega h). \quad (2.88)$$

A c_{xy} számot kospektrumnak, míg a d_{xy} számot kvadratúraspektrumnak nevezzük. A $\gamma_{yx}(h) = \gamma_{xy}(-h)$ azonosságból itt $f_{yx} = \bar{f}_{xy}(\omega)$ következik.

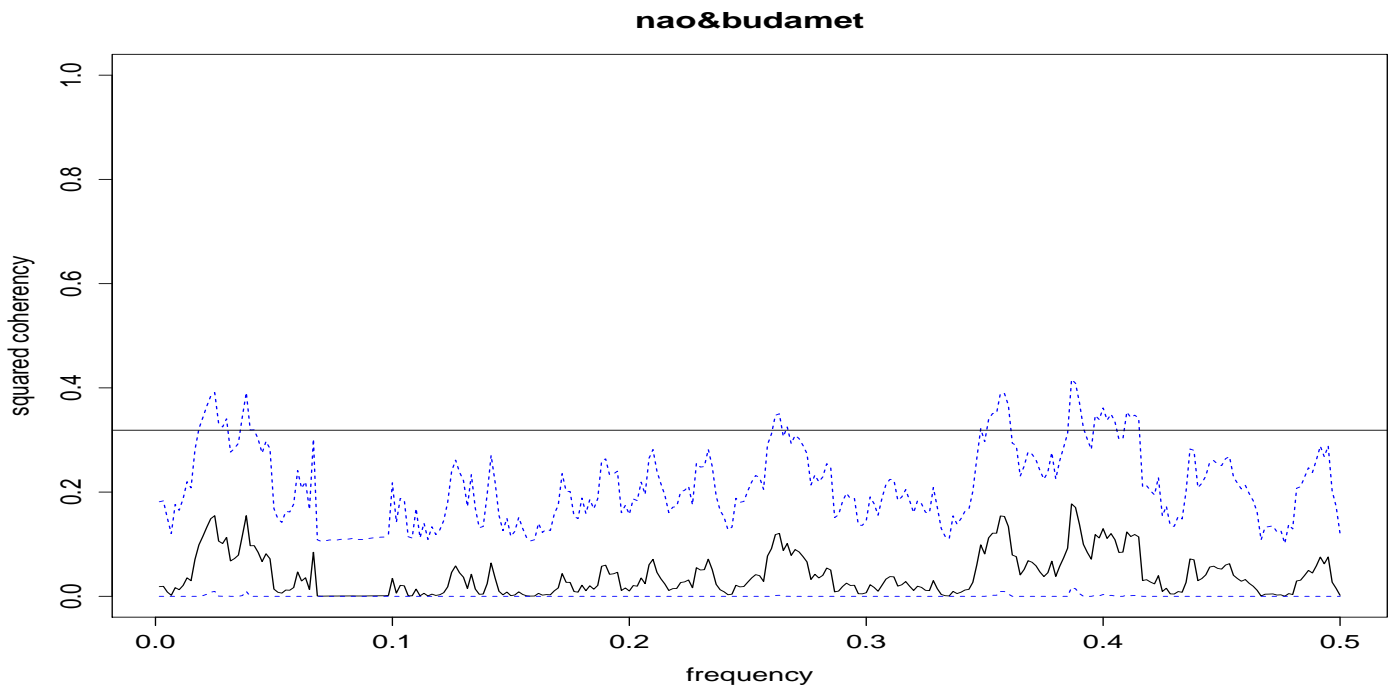
Teljesül továbbá

$$c_{yx}(\omega) = c_{xy}(\omega) \quad (2.89)$$

$$q_{yx}(\omega) = -q_{xy}(\omega) \quad (2.90)$$

Ezután már készen állunk a koherencia definiálására. A négyzetes koherencia függvény az alábbi módon adható meg:

$$\rho_{y \cdot x}(\omega) = \frac{|f_{yx}(\omega)|^2}{f_{xx}(\omega)f_{yy}(\omega)} \quad (2.91)$$



2.8. ÁBRA. A budapesti maximumok és a NAO index közti koherencia

3. fejezet

Eredmények

3.1. Kutatások

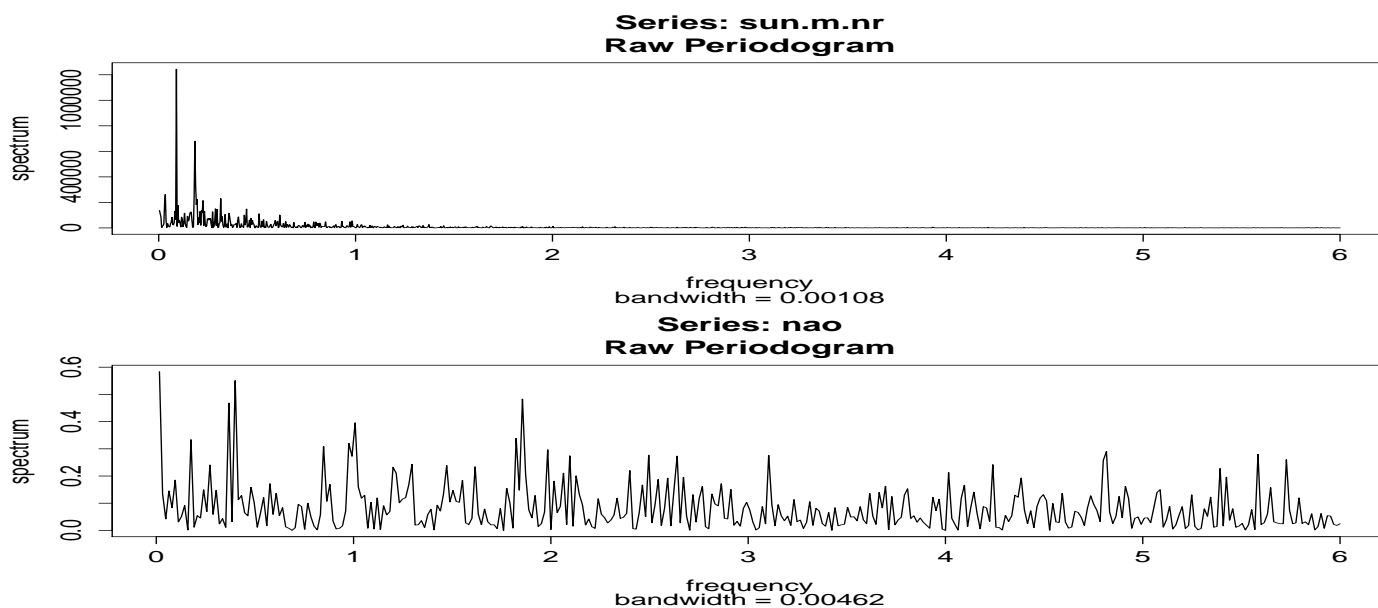
A naptevékenység és az időjárás kapcsolatát nagyon sokan és sokféleképpen vizsgálják. A rendelkezésre álló szakirodalom nagyon széles. A kutatási eredmények szintén sokféle kimenetelűek voltak. A vizsgálatok egyik fontos tárgya az UV sugárzás mértéke volt. Kimutatható ugyanis, hogy a napfoltok ciklusainak során a Nap ún. *teljes besugárzásának* megváltozása $\sim 0.1\%$. Az UV sugárzás mértéke viszont 3–20%-os fluktuációkat is mutat hullámhossztól függően. Az UV sugárzás az ózonrétegben elnyelődve közvetlen hatással van a sztratoszférára és közvetett módon a troposzférára.

Egy másik lehetséges időjárást befolyásoló tényező a kozmikus sugárzás. A napfolttevékenységgel ez negatív korrelációban áll. A kozmikus sugarak az egyik elsődleges kiváltói az atmoszféra középső és alsó rétegének ionizációjának. Feltételezik, hogy az ionizáló sugárzás a légkör elektromos tulajdonságait megváltoztatva befolyásolhatja a felhők képződési folyamatát, a troposzférában és a sztratoszférában megnöveli a felhők számát. A felhők pedig a hőeloszlást befolyásolják az alsóbb légrétegekben.

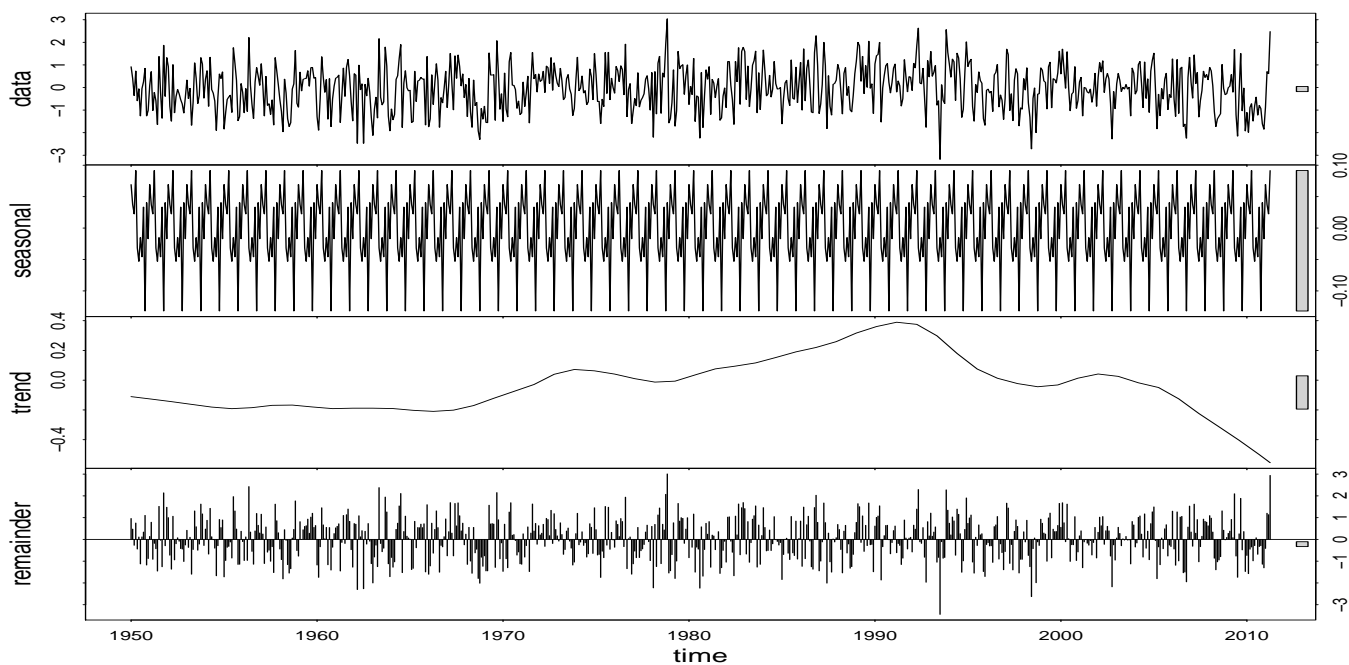
Az általam végzett munka mélysége és természete folytán a klímaváltozást illetően nem áll módomban állást foglalni. Szakdolgozatom célja sokkal inkább, hogy felvázolja az idősorok révén történő klímakutatás lehetőségeit és főbb módszereit.

3.2. Grafikonok

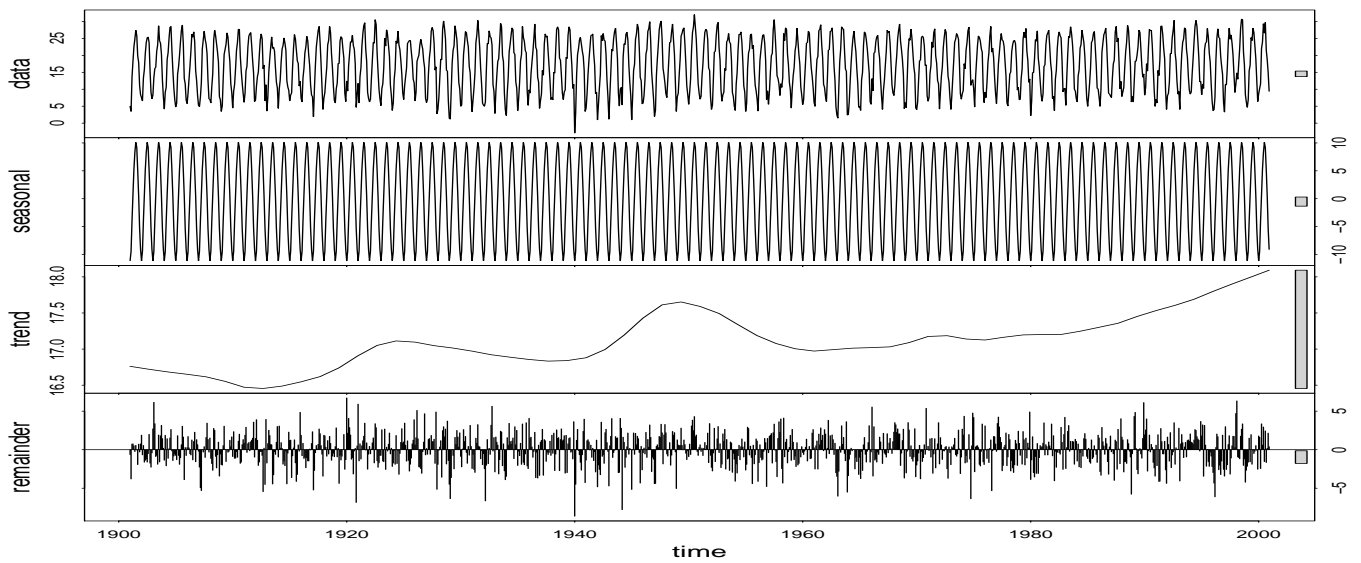
Az alábbiakban néhány, az elemzések során kapott grafikont mutatok be rövid magyarázattal.



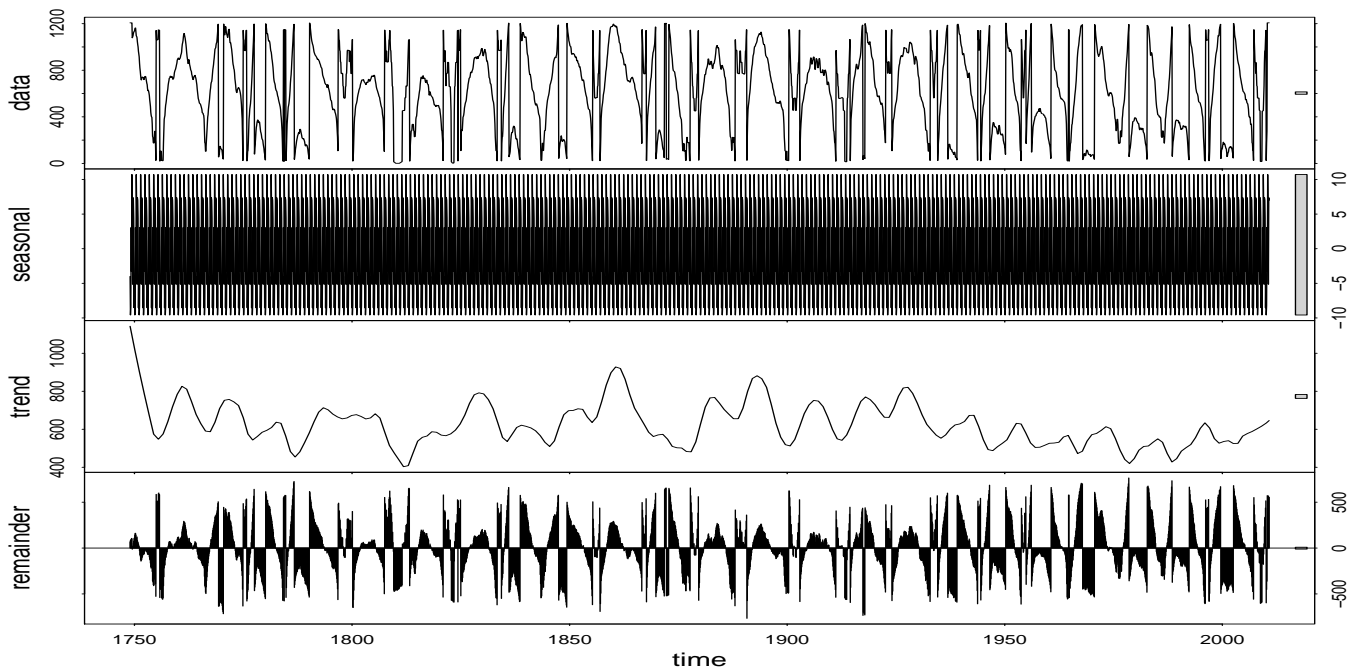
3.1. ÁBRA. A NAO index és a napfoltszám periodogramja. A napfoltszám második legnagyobb kiugrása érdekes módon egybeesik a NAO egyik kiugrásával.



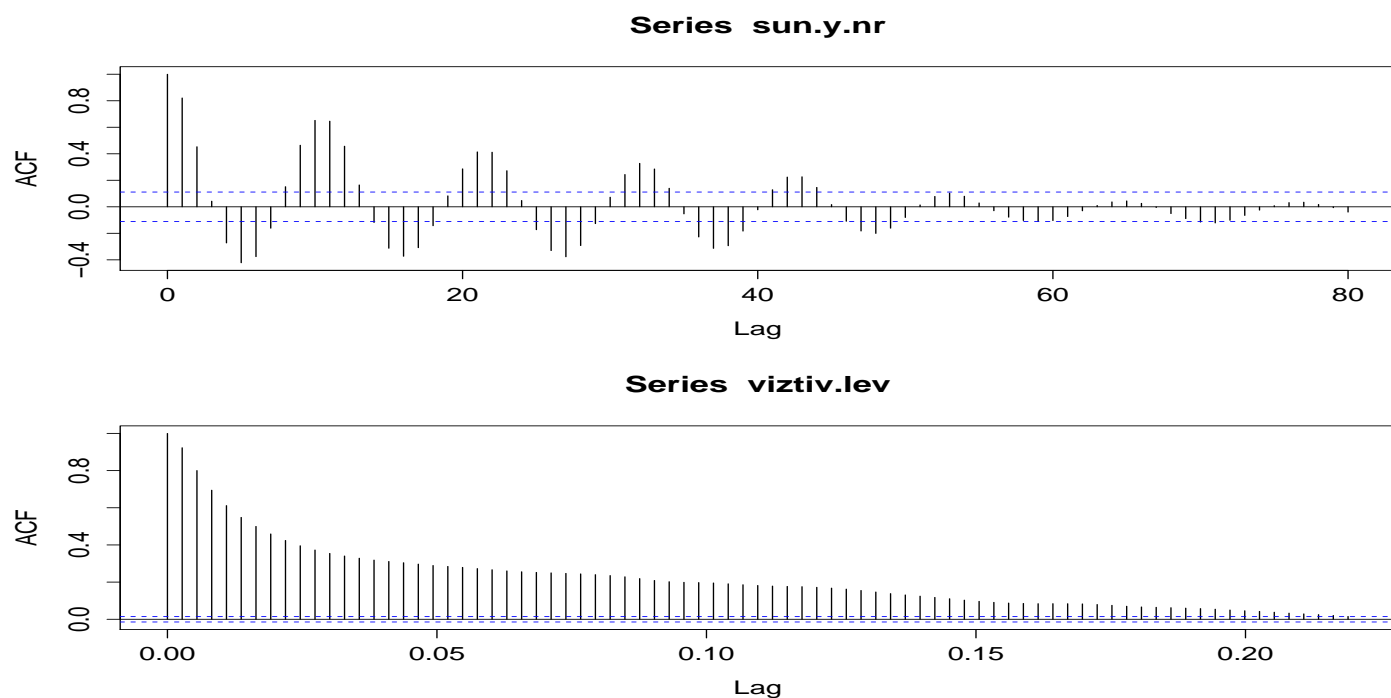
3.2. ÁBRA. A NAO index egy felbontása az stl függvény segítségével. Ez egy fejlett algoritmus, mely polinomok lokális illesztését alkalmazza. Jól látható a monoton csökkenés az elmúlt húsz évben.



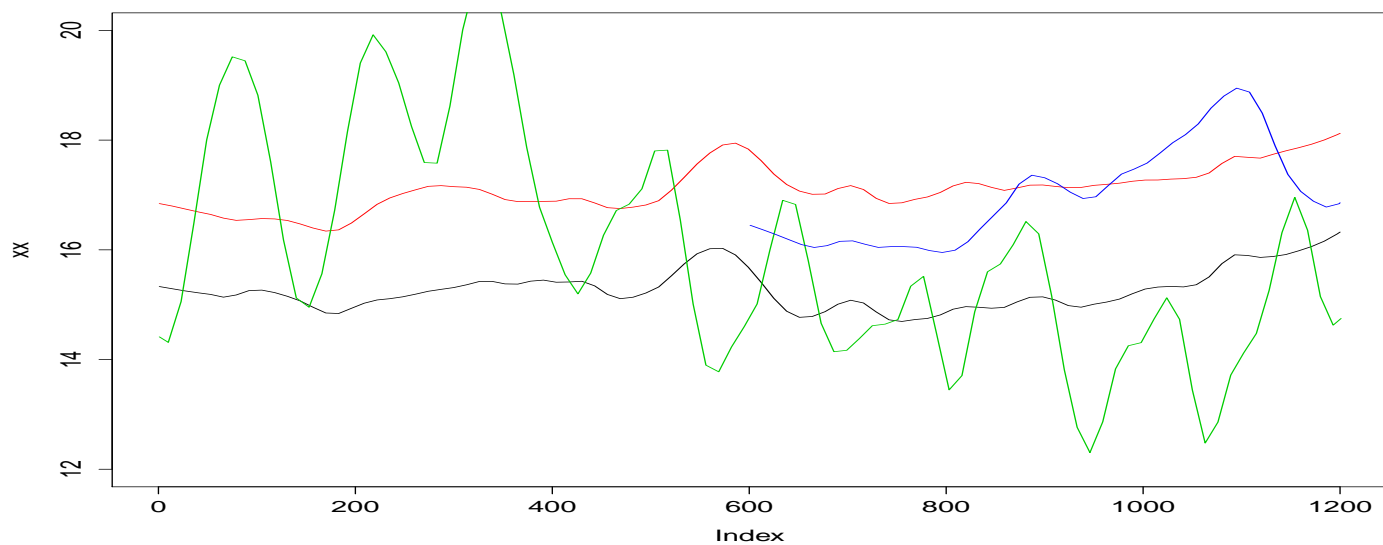
3.3. ÁBRA. A budapesti hőmérséklet egy felbontása az stl függvény segítségével. Jól látható a monotonon növekedő trend az elmúlt negyven évben.



3.4. ÁBRA. A napfoltszám felbontása az stl függvény segítségével. Jól láthatóan a függvény nem szűrte ki hatékonyan a periodikus komponenst. A trendben viszont nagyon szépen kivehetőek a 11 éves ciklusok.



3.5. ÁBRA. Két alapvetően különböző autokorreláció. A vízhozam jellemzően egy hosszú memóriával rendelkező, lassan lecsengő folyamat. A napfolttevékenység autokorrelációja tipikus példa autoregresszív folyamatra.



3.6. ÁBRA. Az stl függvénnyel kapott trendek egy ábrán. Az ábra az 1900 és 2000 közötti időtartamra vonatkozik. Ezek: szombathelyi maximum, **budapesti maximum**, **napfoltok**, **NAO**. A trendek néhol hasonlóak viselkednek, de a kapcsolat nem egyértelmű.

Irodalomjegyzék

- [1] J. Polygiannakis P. Preka-Papadema and X. Moussas: On signal-noise decomposition of timeseries using the continuous wavelet transform: Application to sunspot index, Section of Astronomy, Astrophysics and Mechanics, Department of Physics, National University of Athens,
- [2] J. M. Vaquero: Historical Sunspot Observations: A Review, Departamento de Física Aplicada, Universidad de Extremadura, Cáceres, Spain
- [3] K. M. Hiremath: Prediction of future fifteen solar cycles, Indian Institute of astrophysics
- [4] A. Asensio Ramos: Extreme Value Theory and the Solar Cycle, Instituto de Astrofísica de Canarias
- [5] M. Schüssler: Are solar cycles predictable?, Max Planck Institute for Solar System Research
- [6] A. Brandenburg and E. A. Spiegel: Modeling a Maunder Minimum, Astronomy Department, Columbia University
- [7] A. Bershadskii: Transitional solar dynamics, cosmic rays and global warming, ICAR, Israel
- [8] R. Cameron, M. Schüssler: A robust correlation between growth rate and amplitude of solar cycles: consequences for prediction methods, Max-Planck-Institut für Sonnensystemforschung
- [9] Z. Q. Qu, C. L. Xu, X. L. Yan, Z.K.Xue and Z.N.Qu: Prediction of Solar Flares from a Statistical Analysis of Events during Solar Cycle 23
- [10] R. Arlt: The Butterfly Diagram in the 18th century
- [11] Yuko Motizuki, Kazuya Takahashi, Kazuo Makishima, Aya Bamba, Yoichi Nakai, Yasushige Yano, Makoto Igarashi, Hideaki Motoyama, Kokichi Kamiyama, Keisuke Suzuki, Takashi Imamura: An Antarctic ice core recording both supernovae and solar cycles

-
- [12] Jozsef Garai: Impact generated shockwaves are proposed for the origin of sunspots to explain the detected planetary effects on the solar activity
- [13] A. Malik and M. Bohm: A Statistical Analysis of Sunspot Active Longitudes, Department of Space Science
- [14] Vinita Suyal, Awadhesh Prasad, Harinder P. Singh: Nonlinear Time Series Analysis of Sunspot Data
- [15] K. M. Hiremath: Physics of the Solar Cycle : New Views, Indian Institute of Astrophysics
- [16] D. O. Gough: Vainu Bappu Memorial Lecture: What is a sunspot?, Institute of Astronomy, University of Cambridge, UK
- [17] Solar cycles: The past evolution influence Alexis Klutsch and Rubens Freire Ferrero
- [18] Boris Komitov: An evidence for solar activity influence on the meteorological processes in the south polar region of Mars during the great opposition in ad 1924, Bulgarian Academy of Sciences Institute of Astronomy
- [19] Boris Komitov, Momchil Dechev, Peter Duchlev: The climate of Bulgaria during 19th and 20th centuries by instrumental and indirect data : solar modulated cycles and their evolution, Bulgarian Academy of Sciences -Institute of Astronomy
- [20] Robert W. Johnson: Influence of solar magnetic activity on the North American temperature record, Alphawave Research
- [21] Dimitar Valev: Statistical relationships between the surface air temperature anomalies and the solar and geomagnetic activity indices
- [22] Boris Komitov: The sun - climate relationship : iii. the solar eruptions, north-south sunspot area asymmetry and climate
- [23] Boris Komitov , Peter Duchlev, Kostadinka Koleva, Momchil Dechev: Synthetic solar X-ray flares time series since ad 1968
- [24] Boris Komitov, Stefano Sello, Peter Duchlev, Momchil Dechev, Kaloyan Penev and Kostadinka Koleva: Synthetic solar X-ray flares time series since ad 1968
- [25] Z. L. Du and H. N. Wang, Does a low solar cycle minimum hint at a weak upcoming cycle?, Key Laboratory of Solar Activity, National Astronomical Observatories, Chinese Academy of Sciences
- [26] Anna L. Morozova, Peter Thejll Maria Alexandra Paisc: Long-time temperature variations in Portugal over the last 140 years and the effect of the solar activity

-
- [27] Rainer Arlt, Anastasia Abdolvand: First solar butterfly diagram from Schwabes observations in 1825-1867, Astrophysikalisches Institut Potsdam
 - [28] Baolin Tan: Multi-timescale Solar Cycles and the Possible Implications
 - [29] M. Dubin, R. K. Soberman: Revised Anatomy of Stars
 - [30] Szentimrey T.: Homogenisation presentation
 - [31] Enric Aguilar: Homogeneity and homogenisation methods, presentation
 - [32] E. Illés-Almár: Weather reacting to geomagnetic storms
 - [33] Robert H. Shumway, David S. Stoffer: Time Series Analysis and Its Applications: With R Examples, Springer
 - [34] D.S.G. Pollock: A Handbook of Time-Series Analysis, Signal Processing and Dynamics
 - [35] Peter Bloomfield: Fourier Analysis of Time-Series

Az elemzéshez használt R kód

```
#Készítette: Gombár Tamás
#Eötvös Loránd Tudományegyetem
#2010.május

#####
#Adatok inicializálása
setwd("C:\\_diploma\\_final\\")
pdf("proba.pdf", height=6, width=10)
postscript("mygraph.ps", height=6, width=10)

#Adatok beolvasása
budamet<-read.table("buda-met.txt", header=FALSE, na.strings="NA")
szegmet<-read.table("szeg-met.txt", header=FALSE, na.strings="NA")
szombmet<-read.table("szomb-met.txt", header=FALSE, na.strings="NA")
debrmet<-read.table("debr-met.txt", header=FALSE, na.strings="NA")
vizkisbal<-read.table("Kis-Balaton3kard_22param.txt", header=TRUE, na.strings="NA")
viztiv<-read.table("tivqnapimaxjo.dat", header=FALSE, na.strings="NA")
vizzah<-read.table("zahqnapimaxjo.dat", header=FALSE, na.strings="NA")
noi<-read.table("noi.data", header=FALSE, na.strings="NA")
sun.m<-read.table("monthssn.dat", header=FALSE, na.strings="")
sun.y<-read.table("yearssn.dat", header=FALSE, na.strings="NA")
sun.y<-read.table("yearssn.dat", header=FALSE, na.strings="NA")
nao<-read.table("nao.data", header=FALSE, na.strings="NA")

#Összegzés az adatokról
summary(budamet)
summary(szegmet)
summary(szombmet)
summary(debrmet)
summary(vizkisbal)
summary(viztiv)
summary(vizzah)
summary(noi)
summary(nao)
summary(sun.y)
summary(sun.m)
#A NOI adatsorának elrendezése
noijo=array(0,c(800))
noi[2,4]
n=0
for (i in 1:length(noi$V1)){
```

```
for (j in 1:12){
  n=n+1;
  noi[jo[n]<-noi[i,j+1]
}
}
noi=noi[jo[1:713]

#A beolvasott adatokból a megfelelő változók kiemelése
budamet.avr=budamet$V2
szegmet.avr=szegmet$V2
szombmet.avr=szombmet$V2
debrmet.avr=debrmet$V2
budamet.max=budamet$V3
szegmet.max=szegmet$V3
szombmet.max=szombmet$V3
debrmet.max=debrmet$V3
budamet.min=budamet$V5
szegmet.min=szegmet$V5
szombmet.min=szombmet$V5
debrmet.min=debrmet$V5
viztiv.lev=viztiv$V5
vizzah.lev=vizzah$V5
sun.m.nr=sun.m$V4
sun.y.nr=sun.y$V2

nao=nao$V3
budamet.avr = ts(budamet.avr, start=1901, frequency=12)
szegmet.avr = ts(szegmet.avr, start=1901, frequency=12)
szombmet.avr = ts(szombmet.avr, start=1901, frequency=12)
debrmet.avr = ts(debrmet.avr, start=1901, frequency=12)
budamet.min = ts(budamet.min, start=1901, frequency=12)
szegmet.min = ts(szegmet.min, start=1901, frequency=12)
szombmet.min = ts(szombmet.min, start=1901, frequency=12)
debrmet.min = ts(debrmet.min, start=1901, frequency=12)
budamet.max = ts(budamet.max, start=1901, frequency=12)
szegmet.max = ts(szegmet.max, start=1901, frequency=12)
szombmet.max = ts(szombmet.max, start=1901, frequency=12)
debrmet.max = ts(debrmet.max, start=1901, frequency=12)
noi = ts(noi, start=1948, frequency=12)
viztiv.lev = ts(viztiv.lev, start=1951, frequency=365.25)
vizzah.lev = ts(vizzah.lev, start=1931, frequency=365.25)
sun.m.nr = ts(sun.m.nr, start=1749, frequency=12)
sun.y.nr = ts(sun.m.nr, start=1749, frequency=1)
nao = ts(nao, start=1950, frequency=12)

#A trend és simított trend idosorok előkészítése
budamet.avr.trend=budamet.avr
szegmet.avr.trend=szegmet.avr
szombmet.avr.trend=szombmet.avr
debrmet.avr.trend=debrmet.avr
budamet.max.trend=budamet.max
szegmet.max.trend=szegmet.max
szombmet.max.trend=szombmet.max
debrmet.max.trend=debrmet.max
budamet.min.trend=budamet.min
```

```
szegmet.min.trend=szegmet.min
szombmet.min.trend=szombmet.min
debrmet.min.trend=debrmet.min
viztiv.lev.trend=viztiv.lev
vizzah.lev.trend=vizzah.lev
sun.m.nr.trend=sun.m.nr
sun.y.nr.trend=sun.y.nr
noi.trend=noi
budamet.avr.trendlo=budamet.avr
szegmet.avr.trendlo=szegmet.avr
szombmet.avr.trendlo=szombmet.avr
debrmet.avr.trendlo=debrmet.avr
budamet.max.trendlo=budamet.max
szegmet.max.trendlo=szegmet.max
szombmet.max.trendlo=szombmet.max
debrmet.max.trendlo=debrmet.max
budamet.min.trendlo=budamet.min
szegmet.min.trendlo=szegmet.min
szombmet.min.trendlo=szombmet.min
debrmet.min.trendlo=debrmet.min
viztiv.lev.trendlo=viztiv.lev
vizzah.lev.trendlo=vizzah.lev
sun.m.nr.trendlo=sun.m.nr
sun.y.nr.trendlo=sun.y.nr
noi.trendlo=noi
nao.trendlo=nao

#Az éves mozgóátlag idosorok eloállítása
viztiv.lev.ma12=filter(viztiv.lev,sides=2,rep(1,12)/12)
viztiv.lev.ma12=viztiv.lev.ma12[6:(length(viztiv.lev.ma12)-7)]
vizzah.lev.ma12=filter(vizzah.lev,sides=2,rep(1,12)/12)
vizzah.lev.ma12=vizzah.lev.ma12[6:(length(a)-7)]
budamet.max.ma12=filter(budamet.max,sides=2,rep(1,12)/12)
budamet.max.ma12=budamet.max.ma12[6:(length(budamet.max.ma12)-7)]
budamet.min.ma12=filter(budamet.min,sides=2,rep(1,12)/12)
budamet.min.ma12=budamet.min.ma12[6:(length(budamet.min.ma12)-7)]
budamet.avr.ma12=filter(budamet.avr,sides=2,rep(1,12)/12)
budamet.avr.ma12=budamet.avr.ma12[6:(length(budamet.avr.ma12)-7)]
szombmet.max.ma12=filter(szombmet.max,sides=2,rep(1,12)/12)
szombmet.max.ma12=szombmet.max.ma12[6:(length(szombmet.max.ma12)-7)]
szombmet.min.ma12=filter(szombmet.min,sides=2,rep(1,12)/12)
szombmet.min.ma12=szombmet.min.ma12[6:(length(szombmet.min.ma12)-7)]
szombmet.avr.ma12=filter(szombmet.avr,sides=2,rep(1,12)/12)
szombmet.avr.ma12=szombmet.avr.ma12[6:(length(szombmet.avr.ma12)-7)]
szegmet.max.ma12=filter(szegmet.max,sides=2,rep(1,12)/12)
szegmet.max.ma12=szegmet.max.ma12[6:(length(szegmet.max.ma12)-7)]
szegmet.min.ma12=filter(szegmet.min,sides=2,rep(1,12)/12)
szegmet.min.ma12=szegmet.min.ma12[6:(length(szegmet.min.ma12)-7)]
szegmet.avr.ma12=filter(szegmet.avr,sides=2,rep(1,12)/12)
szegmet.avr.ma12=szegmet.avr.ma12[6:(length(szegmet.avr.ma12)-7)]
debrmet.max.ma12=filter(debrmet.max,sides=2,rep(1,12)/12)
debrmet.max.ma12=debrmet.max.ma12[6:(length(debrmet.max.ma12)-7)]
debrmet.min.ma12=filter(debrmet.min,sides=2,rep(1,12)/12)
debrmet.min.ma12=debrmet.min.ma12[6:(length(debrmet.min.ma12)-7)]
debrmet.avr.ma12=filter(debrmet.avr,sides=2,rep(1,12)/12)
```



```

debrmet.avr.ma12=debrmet.avr.ma12[6:(length(debrmet.avr.ma12)-7)]
noi.ma12=filter(noi,sides=2,rep(1,12)/12)
noi.ma12=noi.ma12[6:(length(noi.ma12)-7)]
sun.m.nr.ma12=filter(sun.m.nr,sides=2,rep(1,12)/12)
sun.m.nr.ma12=sun.m.nr.ma12[6:(length(sun.m.nr.ma12)-7)]
nao.ma12=filter(nao,sides=2,rep(1,12)/12)
nao.ma12=nao.ma12[6:(length(nao.ma12)-7)]

#A hónapokra vett átlagok kiszámítása, illetve simítása
noi.atlag=array(0,c(12))
noi.atlag.n=array(0,c(12))
for(i in 1:length(noi)){
noi.atlag[i%%12+1]=noi.atlag[i%%12+1]+noi[i]
noi.atlag.n[i%%12+1]=noi.atlag.n[i%%12+1]+1
}
noi.atlag=noi.atlag/noi.atlag.n
for(i in 1:length(noi)){
noi.trend[i]=noi.trend[i]-noi.atlag[i%%12+1]
}
noi.lo1=loess(c(noi.atlag,noi.atlag,noi.atlag)~seq(1,36),span=0.25)
plot.ts(predict(noi.lo1))
noi.lo=predict(noi.lo1)[13:24]
for(i in 1:length(noi)){
noi.trendlo[i]=noi.trendlo[i]-noi.lo[i%%12+1]
}

nao.atlag=array(0,c(12))
nao.atlag.n=array(0,c(12))
for(i in 1:length(nao)){
nao.atlag[i%%12+1]=nao.atlag[i%%12+1]+nao[i]
nao.atlag.n[i%%12+1]=nao.atlag.n[i%%12+1]+1
}
nao.atlag=nao.atlag/nao.atlag.n
for(i in 1:length(nao)){
nao.trend[i]=nao.trend[i]-nao.atlag[i%%12+1]
}
nao.lo1=loess(c(nao.atlag,nao.atlag,nao.atlag)~seq(1,36),span=0.25)
plot.ts(predict(nao.lo1))
nao.lo=predict(nao.lo1)[13:24]
for(i in 1:length(nao)){
nao.trendlo[i]=nao.trendlo[i]-nao.lo[i%%12+1]
}

budamet.max.atlag=array(0,c(12))
budamet.max.atlag.n=array(0,c(12))
for(i in 1:length(budamet.max)){
budamet.max.atlag[i%%12+1]=budamet.max.atlag[i%%12+1]+budamet.max[i]
budamet.max.atlag.n[i%%12+1]=budamet.max.atlag.n[i%%12+1]+1
}
budamet.max.atlag=budamet.max.atlag/budamet.max.atlag.n
for(i in 1:length(budamet.max)){
budamet.max.trend[i]=budamet.max.trend[i]-budamet.max.atlag[i%%12+1]
}
budamet.max.lo1=loess(c(budamet.max.atlag,budamet.max.atlag,budamet.max.atlag)~seq(1,36),span=0.25)

```

```

plot.ts(predict(budamet.max.lo1))
budamet.max.lo=predict(budamet.max.lo1)[13:24]
for(i in 1:length(budamet.max)){
budamet.max.trendlo[i]=budamet.max.trendlo[i]-budamet.max.lo[i%%12+1]
}

sun.m.nr.atlag=array(0,c(12))
sun.m.nr.atlag.n=array(0,c(12))
for(i in 1:length(sun.m.nr)){
sun.m.nr.atlag[i%%12+1]=sun.m.nr.atlag[i%%12+1]+sun.m.nr[i]
sun.m.nr.atlag.n[i%%12+1]=sun.m.nr.atlag.n[i%%12+1]+1
}
sun.m.nr.atlag=sun.m.nr.atlag/sun.m.nr.atlag.n
for(i in 1:length(sun.m.nr)){
sun.m.nr.trend[i]=sun.m.nr.trend[i]-sun.m.nr.atlag[i%%12+1]
}

vizzah.lev.atlag=array(0,c(12))
vizzah.lev.atlag.n=array(0,c(12))
for(i in 1:length(vizzah.lev)){
vizzah.lev.atlag[i%%12+1]=vizzah.lev.atlag[i%%12+1]+vizzah.lev[i]
vizzah.lev.atlag.n[i%%12+1]=vizzah.lev.atlag.n[i%%12+1]+1
}
vizzah.lev.atlag
length(vizzah.lev)
vizzah.lev.atlag=vizzah.lev.atlag/vizzah.lev.atlag.n
for(i in 1:length(vizzah.lev)){
vizzah.lev.trend[i]=vizzah.lev.trend[i]-vizzah.lev.atlag[i%%12+1]
}
vizzah.lev.lo1=loess(c(vizzah.lev.atlag,vizzah.lev.atlag,vizzah.lev.atlag)~seq(1,36),span=0.25)
plot.ts(predict(vizzah.lev.lo1))
vizzah.lev.lo=predict(vizzah.lev.lo1)[13:24]
for(i in 1:length(vizzah.lev)){
vizzah.lev.trendlo[i]=vizzah.lev.trendlo[i]-vizzah.lev.lo[i%%12+1]
}

viztiv.lev.atlag=array(0,c(12))
viztiv.lev.atlag.n=array(0,c(12))
for(i in 1:length(viztiv.lev)){
viztiv.lev.atlag[i%%12+1]=viztiv.lev.atlag[i%%12+1]+viztiv.lev[i]
viztiv.lev.atlag.n[i%%12+1]=viztiv.lev.atlag.n[i%%12+1]+1
}
viztiv.lev.atlag
length(viztiv.lev)
viztiv.lev.atlag=viztiv.lev.atlag/viztiv.lev.atlag.n
for(i in 1:length(viztiv.lev)){
viztiv.lev.trend[i]=viztiv.lev.trend[i]-viztiv.lev.atlag[i%%12+1]
}
viztiv.lev.lo1=loess(c(viztiv.lev.atlag,viztiv.lev.atlag,viztiv.lev.atlag)~seq(1,36),span=0.25)
plot.ts(predict(viztiv.lev.lo1))
viztiv.lev.lo=predict(viztiv.lev.lo1)[13:24]
for(i in 1:length(viztiv.lev)){
viztiv.lev.trendlo[i]=viztiv.lev.trendlo[i]-viztiv.lev.lo[i%%12+1]
}

```

```

debrmet.avr.atlag=array(0,c(12))
debrmet.avr.atlag.n=array(0,c(12))
for(i in 1:length(debrmet.avr)){
debrmet.avr.atlag[i%%12+1]=debrmet.avr.atlag[i%%12+1]+debrmet.avr[i]
debrmet.avr.atlag.n[i%%12+1]=debrmet.avr.atlag.n[i%%12+1]+1
}
debrmet.avr.atlag
length(debrmet.avr)
debrmet.avr.atlag=debrmet.avr.atlag/debrmet.avr.atlag.n
for(i in 1:length(debrmet.avr)){
debrmet.avr.trend[i]=debrmet.avr.trend[i]-debrmet.avr.atlag[i%%12+1]
}
debrmet.avr.lo1=loess(c(debrmet.avr.atlag,debrmet.avr.atlag,debrmet.avr.atlag)~seq(1,36),span=0.25)
plot.ts(predict(debrmet.avr.lo1))
debrmet.avr.lo=predict(debrmet.avr.lo1)[13:24]
for(i in 1:length(debrmet.avr)){
debrmet.avr.trendlo[i]=debrmet.avr.trendlo[i]-debrmet.avr.lo[i%%12+1]
}
#Adatok inicializálásának vége
#####
#####
#####
#Idosorok ábrázolása
plot.ts(debrmet.avr.trendlo)
plot.ts(nao)
plot.ts(budamet.max)
plot.ts(vizkisbal[,1:10])
plot.ts(sun.m.nr)
plot.ts(viztiv.lev)
plot.ts(vizzah.lev)
plot.ts(noi)
plot.ts(nao)
par(mfrow=c(3,1))

x=1:length(budamet.max.ma12)
l=lm(budamet.max.ma12~x)
plot.ts(budamet.max.ma12)
abline(l)

plot.ts(budamet.min.ma12)
plot.ts(budamet.avr.ma12)

par(mfrow=c(3,1))
plot.ts(viztiv.lev.ma12)
plot.ts(sun.m.nr.ma12)

x=1:length(noi.ma12)
l=lm(noi.ma12~x)
plot.ts(noi.ma12)
abline(l)

#Autokorrelációk
acf(budamet.max,na.action=na.pass,lag.max=120)
acf(noi,na.action=na.pass,lag.max=80)
acf(budamet.avr,na.action=na.pass,lag.max=80)

```

```

acf(viztiv.lev,na.action=na.pass,lag.max=80)
acf(sun.m.nr,na.action=na.pass,lag.max=80)
acf(sun.y.nr,na.action=na.pass,lag.max=80)

acf(budamet.max.ma12,na.action=na.pass,lag.max=120)
acf(noi.ma12,na.action=na.pass,lag.max=80)
acf(budamet.avr.ma12,na.action=na.pass,lag.max=80)
acf(viztiv.lev.ma12,na.action=na.pass,lag.max=80)
acf(sun.m.nr.ma12,na.action=na.pass,lag.max=80)
acf(budamet.max.trendlo,na.action=na.pass,lag.max=120)
acf(noi.trendlo,na.action=na.pass,lag.max=80)
acf(budamet.max.trendlo,na.action=na.pass,lag.max=80)
acf(viztiv.lev.trendlo,na.action=na.pass,lag.max=80)
acf(sun.m.nr.lo,na.action=na.pass,lag.max=80)
acf(sun.y.nr,na.action=na.pass,lag.max=80)
acf(nao,na.action=na.pass,lag.max=80)

l=min(length(sun.m.nr),length(budamet.max),length(vizzah.lev),dim(noi)[1])
ccf(budamet.max,budamet.min, lag.max = 150, type = "correlation", plot = TRUE, na.action = na.fail)

l=min(length(sun.m.nr.lo),length(budamet.max.lo),length(vizzah.lev),dim(noi)[1])
ccf(budamet.max.lo,noi.lo, lag.max = 150, type = "correlation", plot = TRUE, na.action = na.fail)

#Néhány periodogramm
par(mfrow=c(2,1))
sun.per=spec.pgram(sun.m.nr,taper=0,log="no")
budamet.per=spec.pgram(budamet.max,taper=0,log="no")
nao.per=spec.pgram(nao,taper=0,log="no")

par(mfrow=c(3,1))
viztiv.per=spec.pgram(viztiv.lev.trendlo,log="no")
budamet.per=spec.pgram(budamet.max.trendlo,taper=0,log="no")
noi.per=spec.pgram(noi.trendlo,taper=0,log="no")

par(mfrow=c(3,1))
sun.per.ma12=spec.pgram(sun.m.nr.ma12,taper=0,log="no")
budamet.per.ma12=spec.pgram(budamet.max.ma12,taper=0,log="no")
noi.per.ma12=spec.pgram(noi.ma12,taper=0,log="no")

par(mfrow=c(3,1))
sun.per.ma12=spec.pgram(sun.m.nr.ma12,taper=0,log="no")
budamet.per.ma12=spec.pgram(budamet.max.trendlo,taper=0,log="no")
noi.per.ma12=spec.pgram(noi.trendlo,taper=0,log="no")

par(mfrow=c(3,1))
vizzah.per.ma12=spec.pgram(vizzah.lev.ma12,taper=0,log="no")
viztiv.per.ma12=spec.pgram(viztiv.lev.ma12,taper=0,log="no")
szeg.per.ma12=spec.pgram(szegmet.avr.ma12,taper=0,log="no")

par(mfrow=c(3,1))
vizzah.per.ma12=spec.pgram(vizzah.lev.trendlo,taper=0,log="no")
viztiv.per.ma12=spec.pgram(viztiv.lev.trendlo,taper=0,log="no")
szeg.per.ma12=spec.pgram(debrmet.avr.trendlo,taper=0,log="no")

#Néhány Spektrum

```

```

par(mfrow=c(3,1))
spectrum(nao,spans=c(7,7),taper=0,main="nao spectrum")
spectrum(budamet.max,spans=c(7,7),taper=0,main="budamet.max spectrum")
spectrum(sun.m.nr,spans=c(7,7),log="no",taper=0,main="sun.m.nr spectrum")

par(mfrow=c(3,1))
spectrum(noi.trendlo,spans=c(7,7),taper=0,main="noi.trendlo spectrum",log="no")
spectrum(budamet.max.trendlo,spans=c(7,7),taper=0,main="budamet.max.trendlo spectrum",log="no")
spectrum(sun.m.nr,spans=c(7,7),taper=0,main="sun.m.nr.ma12 spectrum",log="no")
par(mfrow=c(2,2))
spectrum(noi,spans=c(7,7),taper=0,main="noi.ma12 spectrum",log="no")
spectrum(budamet.max.ma12,spans=c(7,7),taper=0,main="budamet.max.ma12 spectrum",log="no")
spectrum(sun.m.nr.ma12,spans=c(7,7),taper=0,main="sun.m.nr.ma12 spectrum",log="no")
spectrum(vizzah.lev,spans=c(7,7),taper=0,main="vizzah.ma12 spectrum",log="no")

spectrum(sun.y.nr,spans=c(7,7),taper=0,main="sun.y.nr",log="no")

par(mfrow=c(2,2))
spectrum(noi.trendlo,spans=c(7,7),taper=0,main="noi.trendlo spectrum",log="no")
spectrum(budamet.max.trendlo,spans=c(7,7),taper=0,main="budamet.max.trendlo spectrum",log="no")
spectrum(sun.m.nr.trendlo,spans=c(7,7),taper=0,main="sun.m.nr.trendlo spectrum",log="no")
spectrum(vizzah.lev.trendlo,spans=c(7,7),taper=0,main="vizzah.trendlo spectrum",log="no")

#Koherencia
x=ts(cbind(nao[1:700],budamet.max[1:700]))
s=spec.pgram(x,kernel("daniell",9),taper=0)
plot(s,plot.type="phase",ci.lty=2,main="noi&budamet")

x=ts(cbind(noi.ma12[1:1],budamet.max.ma12[1:1]))
s=spec.pgram(x,kernel("daniell",9),taper=0)
s$df
f=qf(.999,2,s$df-2)
c=f/(18+f)
plot(s,plot.type="coh",ci.lty=2)
abline(h=c)

x=ts(cbind(nao[1:600],sun.m.nr[2412:3011]))
s=spec.pgram(x,kernel("daniell",9),taper=0)
s$df
f=qf(.999,2,s$df-2)
c=f/(18+f)
plot(s,plot.type="coh",ci.lty=2,main="nao&sunspot")
abline(h=c)

x=ts(cbind(nao.ma12[1:1],budamet.max.ma12[1:1]))
s=spec.pgram(x,kernel("daniell",9),taper=0)
s$df
f=qf(.999,2,s$df-2)
c=f/(18+f)
plot(s,plot.type="coh",ci.lty=2)
abline(h=c)

#Autoregresszió spektrogrammja
par(mfrow=c(2,1))
spec.ar(nao,order=20,log="no")

```

```
spec.ar(budamet.max.trendlo,order=20,log="no")
noi.ar=ar(noi,order.max=30)
plot(0:30,noi.ar$aic,type="l")
noi.ar

#"Lag Plot"
lag.plot(sun.y.nr,lags=12,layout=c(3,4),diag=F)
lag.plot(debrmet.max.ma12,lags=12,layout=c(3,4),diag=F)

par(mfrow=c(3,3), mar=c(2.5,4,4,1))
for(h in 0:8){
plot(lag(szombmet.max,-h),vizzah.lev)
}

#Mozgóátlaggal való felbontás
x=decompose(sun.m.nr, type ="additive")
x$figure
plot(x)

x=decompose(sun.m.nr, type ="additive")
x$figure
plot(x)
spectrum(x$trend[7:(length(x$trend)-7)],taper=0,main=,log="no")

#STL (loess) felbontás
plot(stl(sun.m.nr,s.window="periodic",t.window=130))
plot(stl(nao,s.window="periodic",t.window=130))
plot(stl(budame.max,s.window="periodic",t.window=130))

#2D Zaj
n=30
x=1:n
y=x
z=replicate(n, rnorm(n))
op <- par(bg = "white")
persp(x, y, z, theta = 30, phi = 30, expand = 0.5, col = "lightblue")
persp(x, y, z, theta = 30, phi = 30, expand = 0.5, col = "lightblue",
      ltheta = 120, shade = 0.75, ticktype = "detailed",
      xlab = "X", ylab = "Y", zlab = "Sinc( r )"
) -> res
round(res, 3)

#Spline simítás
vizzah.spl=smooth.spline(vizzah.lev)
plot(vizzah.lev, main=deparse(vizzah.spl$call), col.main=2)
lines(vizzah.spl, col = "red"); lines(predict(vizzah.spl,seq(1,length(vizzah.spl), len=201)), col = "red")

#ARMA közelítés
x=arma(sun.y.nr, order=c(2,2))
plot.ts(x)
```

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Ezúton szeretnék köszönetet mondani témavezetőmnek, Márkus Lászlónak, aki a félév során mindig szakított rám időt, kérdéseimre mindig érthetően válaszolt, továbbá ötleteivel és észrevételeivel folyamatosan előremozdította diplomamunkám elkészülését.

Köszönöm Illés Erzsébetnek csillagászattal kapcsolatos tanácsait.

Hálás köszönettel tartozom még családomnak a támogatásukért és bátorításukért.