Hogyan hegyezzünk ceruzát, vagyis a fából készűlt szerkezetek torziójának vizsgálata

Zaj András

Újvidéki Egyetem

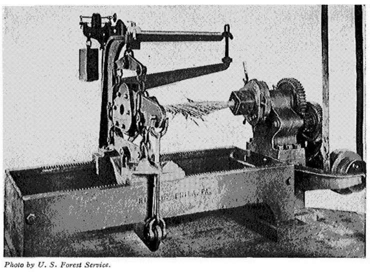
Építőmérnöki kar, Szabadka

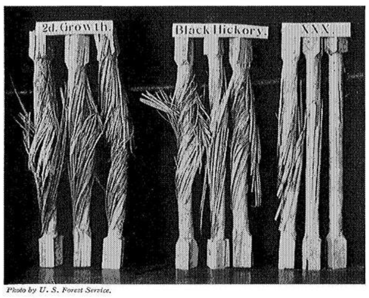
E-mail: andrewzay@gmail.com

1. Bevezető

1.1. A fa mint építőanyag

A fa az egyik legrégebbi és legelterjettebb építőanyag a világon. A fát mint nyersanyagot az emberiség ősidők óta sok mindenre használja. Elégeti, hogy világítson, hőt termeljen vele, mechanikai tulajdonságait kihasználva eszközöket, építményeket, épületeket hoz létre belőle. Mint építőanyag, talán a mechanikai tulajdonságai a legfontosabbak azok közül is a szilárdsága. A fa szilárdsága függ annak keménységétől, nedvességtartalmától, göcsösségétől, az igénybevétel irányától, ismétlődésétől és sebességétől. A természetes faanyag ortogonálisan anizotróp anyag, tehát a rugalmassági jellemzői nem tekinthetőek azonosnak minden irányból. Mivel a munkában a fából készűlt szerkezetek csavarásával foglalkozom, így számomra a legfontosabb a mechanikai tulajdonsága a nyírással szembeni ellenállása. Az alábbi képeken láthatḱ a csavarószilárdság meghatározásának menete rostokra merőleges síkban.





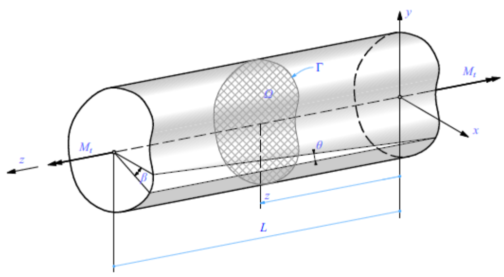
Jól látható, hogy amennyiben a csavarónyomaték rostirányú, a dualitás következtében rostirányú elválás, szálasodás jelentkezik, mivel a csúszófeszültségekkel szembeni ellenállás rostirányban kisebb, mint rá merőleges síkban.

1.2. A munka célja

A dolgozat célja a csavarónyomatékkal terhelt prizmatikus rudak feszültség állapotának numerikus vizsgálata. A mérnöki szerkezetekben ritkán találkozhatunk tiszta csavarással terhelt tartókkal, bár a hajlítás mellet sűrűn jelentkezhet mint összetett igénybevétel. Ahhoz, hogy tiszta csavarással találkozzunk elég megfigyelnünk a ceruzánkat hegyezés közben. A munkám során a következő feltételezéseket alkalmaztam: a fa mint anyag, homogén, izotróp és lineárisan rugalmas. Mérnöki gyakorlatban előfordulhatnak olyan esetek mikor a probléma nem oldható meg analitikusan illetve az analitikus megoldás összetettsége miatt, szükség van numerikus módszer alkalmazására. Legelterjettebb numerikus módszerek a véges differenciák módszere és a végeselem módszer. A dolgozatban a véges differencia módszer alkalmatosságát tanulmányoztam a Poisson másodfokú parciális differenciál egyenlet megoldására, négyzet és kör alakú tartományon. Valamint bemutatásra kerűlnek az analitikus megoldások is amelyeket a mérnöki gyakorlatban legtöbbször alkalmaznak.

2. Csavarás

2.1. Definíció. *Ha egy rúdelemre a határoló keresztmetszetek síkjában forgató erőpárok M_t működnek, akkor a rúdelem csavarásra van igénybe véve.*



Egy általános keresztmetszetű prizmatikus rudat csavarással M_t terhelünk akkor a rúd minden pontjában csak nyírófeszűltségek jelentkeznek, ezt a fajta terhelési esetet szabad csavarásnak nevezzük. A csavarónyomaték hatására a rúd keresztmetszete elfordul a z tengely körűl. Azt a szöget pedig amellyel elfordul a keresztmetszet elfordulás szögének nevezzük és φ vel jelöljük. A rúd egységhosszra vonatkozó elcsavarodását relatív elcsavarodásnak nevezzük és θ-val jelöljük. Fontos megjegyezni, hogy a relatív elcsavarodás vagyis a θ tiszta alakváltozási mennyiség. A rudaknál amelyek csavarással terheltek a keresztmetszetek öblösödnek, nem maradnak a saját síkukban, ez alol kivételt képeznek a kör keresztmetszetű rudak. Elsőnek a kör keresztmetszetű rudakkal foglalkozunk az elemi szilárdságtan szintjén. A következő feltételezésekből kiindulva: a keresztmetszetek a saját síkjukban fordúlnak el, tehát nem öblösödnek, a z tengelyre merőleges egyenesszakaszok a z körül fordulnak el, valamint sem a rúd hossza, sem az átmérője nem változik, azonban a z távolságra levő körlapok egymáshoz viszonyítva relatív szögelfordulást θ szenvednek. A kör keresztmetszetnél a nyírófeszűltségek τ lineárisan oszlanak el a következő összefüggés alapján:

$$\tau = \frac{M_t}{I_t} r \tag{2.1}$$

A maximális értékét pedig a keresztmetszet peremén éri el. Az általános keresztmetszetű prizmatikus rudak csavarását pedig Saint-Venant féle szemi-inverz eljárással oldhatjuk meg. Feltételezzük, hogy csak két alakválltozás komponens vagyis a két szögtorzulás γ_{xz} és a γ_{yz} különbözik zérustól. A $\phi(x, y)$ torzulási függvény bevezetésével meghatározhatóak a nyírófeszültségek:

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x}, \quad \tau_{yz} = \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial y} \tag{2.2}$$

valamint a csavarónyomaték értéke amelyet pedig a következő képlettel számíthatjuk ki:

$$M_t = 2 \int_A \phi(x, y) dA \tag{2.3}$$

A geometriai értelmezésük pedig, ha a torzulási függvény értékeit mint applikáta tekintjük, akkor felületet kapunk eredményűl. A felület érintőinek meredeksége adja a nyírófeszűltségek értékeit. A csavarónyomaték értéke pedig egyenlő a térfogat kétszeresével amelyet a felület és a keresztmetszet síkja határol. A csavarás problémája másodfokú parciális differenciál egyenlet megoldására vezethető vissza:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -2G\theta \tag{2.4}$$

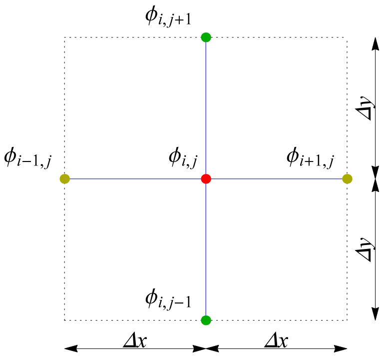
valamint a hozzátartozó a peremfeltételekkel:

$$\phi|_{\Gamma_0} = 0 \tag{2.5}$$

A gyakorlatban ennek a matematikai problémának a megoldása eléggé összetett, mert a különböző alakú tartomány esetén külön megoldást kell keresni. A derékszögű keresztmetszetű rúd csavarás problémájának megoldására többféle eljárás alkalmazható. Általában az elemi szilárdságtanban szereplő táblázatot használják, mely a különféle oldalarányokhoz kínál megoldást. A keresztmetszet peremén a nyírófeszültségek iránya párhuzamos a téglalap oldalával, azonban a sarkokban a nyírófeszültségek zérus értékűek.

3. A véges differencia módszer

A véges differenciák módszere (angolul finite difference method vagy röviden FEM) alapötlete, a tartományt derékszögű egyenlő közű ráccsal leborítva a derivált értékeit a csomópontokban közelítése, véges differencia sémákkal. Így a parciális differenciál egyenlet közelítő megoldása lineáris algebrai egyenletrendszerre vezethető vissza. A másodfokú parciális deriváltakat a következőképpen tudjuk véges diffenciák módszerével numerikusan közelíteni négyzetalakú tartományon:

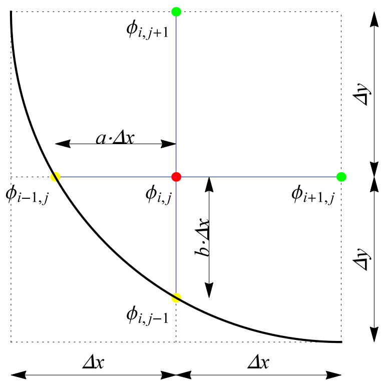


$$\frac{\partial^2\phi}{\Delta x^2} \cong \frac{1}{\Delta x^2}\left(\phi_{i+1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i-1,j}\right)$$
$$\frac{\partial^2\phi}{\Delta y^2} \cong \frac{1}{\Delta y^2}\left(\phi_{i,j+1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j-1}\right)$$

Tehát a fentiekben leírt közelítéssel a Poisson parciális differenciál egyenlet (2.4) a következő véges differenciával közelíthető az (i, j) csomópontban:

$$\frac{1}{\Delta x^2}\left(\phi_{i+1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i-1,j}\right) + \frac{1}{\Delta y^2}\left(\phi_{i,j+1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j-1}\right) = -2G\theta \tag{3.6}$$

azonban a közelítés álltalános tartomány esetén lényegesen öszetettebb:



$$\Delta x = \Delta y = h$$
$$0 < a, b < 1$$

Az ábrán látható, hogy az $(i-1, j)$ és az $(i, j-1)$ csomópontok a tartomány szélén találhatóak, tehát feltételezhetjük, hogy ismert a $\phi_{i-1,j}$ és az $\phi_{i,j-1}$ értéke, a csavarás esetében mivel homogén peremfeltételekről (2.5) van szó ezért az értékük zérus. Általános alakú tartományt vizsgálva amint az ábra is jól mutatja, az $(i-1, j)$ és a $(i, j-1)$ csomópontok nem esnek egybe a rácspontokkal.
Észrevehető, hogy az (3.6) egyenletet nem tudjuk alkalmazni, mert egyes pontok amelyek a képletben szerepelnek nincsenek a tartomány határán. Ez helyett megpróbáljuk alkalmazni a torzulási fügvény ismert csomóponti értékeit $\phi_{i-1,j}$ és $\phi_{i,j-1}$.

A Taylor sorba fejtést használva a ϕ:

$$\phi_{i-1,j} = \phi_{i,j} + ah\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{1}{2}(ah)^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \dots$$
$$\phi_{i+1,j} = \phi_{i,j} - h\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{1}{2}h^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \dots$$

tehát

$$\phi_{i-1,j} + a\phi_{i+1,j} \cong (1+a)\phi_{i,j} + \frac{1}{2}a(1+a)h^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}$$

az előbbiekből következik, hogy a második parciális derivált x szerint az (i,j) csomópontban a következő egyenlettel közelíthető:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} \cong \frac{2}{\Delta x^2}\left(\frac{1}{a(1+a)}\phi_{i-1,j} + \frac{1}{1+a}\phi_{i+1,j} - \frac{1}{a}\phi_{i,j}\right).$$

hasonló módon kapjuk meg az y szerinti második derivált közelítését is:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} \cong \frac{2}{\Delta y^2}\left(\frac{1}{b(1+b)}\phi_{i,j-1} + \frac{1}{1+b}\phi_{i,j+1} - \frac{1}{b}\phi_{i,j}\right).$$

behelyettesítve a közelítéseket következik, hogy általános alakú tartomány esetén, felhasználva a csomópontokat melyek a tartomány pereméhez legközelebb találhatóak a Poisson féle másodfokú parciális differenciál egyenlet a következő alakra hozható

$$\mathbf{??}\frac{2}{\Delta x^2}\left(\frac{1}{a(1+a)}\phi_{i-1,j} + \frac{1}{1+a}\phi_{i+1,j} - \frac{1}{a}\phi_{i,j}\right) + \\ + \frac{2}{\Delta y^2}\left(\frac{1}{b(1+b)}\phi_{i,j-1} + \frac{1}{1+b}\phi_{i,j+1} - \frac{1}{b}\phi_{i,j}\right) = -2G\theta \quad (3.7)$$

4. Mintapéldák

A minatapéldák csavarással terhelt kör és négyszög keresztmetszetű prizmatikus rudak vizsgálatával foglalkoznak. Ezeken a példákon keresztül kerül bemutatásra a Poisson féle másodrendű parciális differenciál egyenlet numerikus megoldása véges differenciák módszerével négyzet és kör alakú tartomány felett.

4.1. Példa. Tekintsünk egy $l = 1.0m$ hosszúságú és derékszögű négyszög keresztmetszetű, $b/a = 0.2/0.2m$ oldalú rudat, melyet a rúd végein szögelfordulás $\theta = 0.01745rad$ terhel. Számítsuk ki a csavarónyomaték értékét M_t amely előidézi a rúd θ szöggel való elcsavarodását, valamint számítsuk ki a legnagyobb nyírófeszültségek τ_{xz} és τ_{yx} értékeit, amelyek a terhelés hatására jelentkeznek.

A feladatot elsőnek analitikusan oldjuk meg, az elemi szilárdságtanban már ismertetett összefüggésekkel. A csavarási merevség meghatározásához szükséges α, β és γ értékeit az elemi szilárdságtanból ismert táblázat tartalmazza, Otpornost materijala, dr. inž. V. Brčć, 156. oldal. Mivel az adott tartó keresztmetszete $b/a = 0.2/0.2m$ azonban a táblázatban szereplő képletek a keresztmetszetet úgy veszik figyelemebe mint $2b/2a$ így a számításokban $b/a = 0.1/0.1m$
használunk.

$$b/a = 0.1/0.1 = 1.0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0.141 \\ \beta = 0.208 \\ \gamma = 1.000 \end{cases}$$

a csavarási merevség értékét C_t a következő képlettel számítjuk:

$$C_t = 16 \cdot G \cdot \beta \cdot b \cdot a^3 = 16 \cdot 10^6 \cdot 0.141 \cdot 0.1 \cdot 0.1^3 = 225.6kNm^2$$

majd a legnagyobb nyírófeszültség τ_{max}:

$$\tau_{max} = \frac{C_t \cdot \theta}{8 \cdot \alpha \cdot b \cdot a^2} = \frac{225.6 \cdot 0.01745}{8 \cdot 0.208 \cdot 0.1 \cdot 0.1^2} = 2365.817308kN/m^2 = 0.23658MPa$$

a csavarónyomatékot pedig megkapjuk mint a csavarási merevség és a szögelfordulás szorzata M_t:

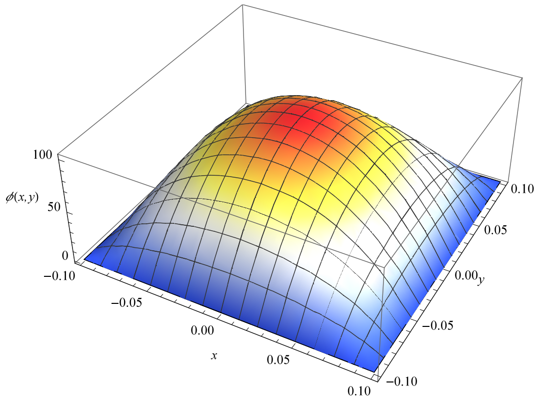
$$M_t = \theta \cdot C_t = 0.01745 \cdot 225.6 = 3.93672kNm$$

Látható, hogy az $l = 1.0m$ hosszúságú derékszögű négyszög keresztmetszetű rúd $\theta = 0.01745rad$ történő elcsavarodásához a rúd végein $M_t = 3.93672kNm$ nagyságú csavarónyomatéknak kell hatnia. A legnagyobb nyírófeszültség $\tau_{max} = 2365.82kN/m^2$ pedig a keresztmetszet oldalának felezővonalában keletkezik.
A következőkben a csavarást leíró Poisson féle parciális differenciál egyenlet (2.4) Fourier módszerel történő megoldásával foglalkozunk. A keresztmetszet csavarási tehetetlenségi nyomatéka I_t sorbafejtéssel kifejezve:

$$I_t = \frac{16}{3}a^3 b \left(1 - \frac{192a}{b\pi^5} \sum_{n=1,3,5...}^{\infty} \frac{1}{n^5} \tanh\left(\frac{n\pi b}{2a}\right)\right)$$

torzulási függvényt $\phi(x,y)$ a következő sorral számíthajuk ki:

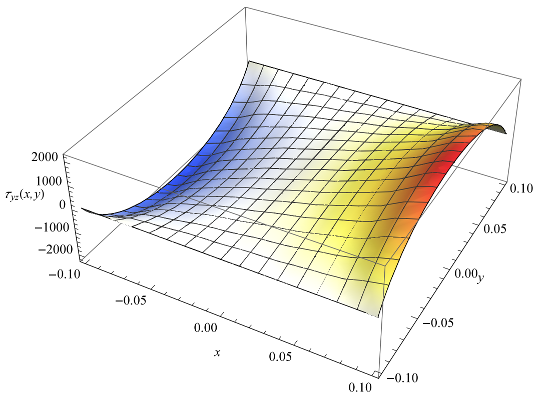
$$\phi(x,y) = \frac{32G\theta a^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5...}^{\infty} \frac{1}{n^3}(-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(1 - \frac{\cosh\frac{n\pi y}{2a}}{\cosh\frac{n\pi b}{2a}}\right) \cos\frac{n\pi x}{2a}$$

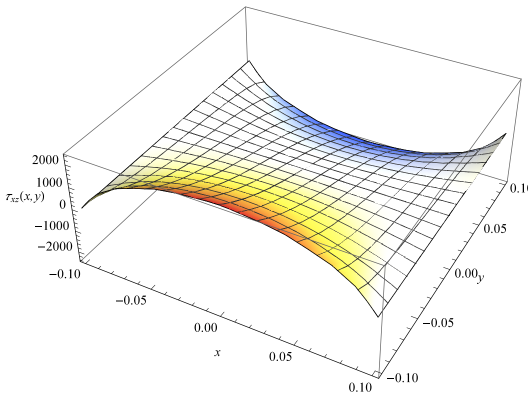


a nyírófeszültségek τ_{yz} és τ_{xz} viszont a következő képlettel:

$$\tau_{yz} = \frac{16G\theta a}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5...}^{\infty} \frac{1}{n^2}(-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(1 - \frac{\cosh\frac{n\pi y}{2a}}{\cosh\frac{n\pi b}{2a}}\right) \sin\frac{n\pi x}{2a}$$

$$\tau_{xz} = \frac{16G\theta b}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5...}^{\infty} \frac{1}{n^2}(-1)^{\frac{n-1}{2}} \left(-\cos\frac{n\pi x}{2a}\frac{1}{\cosh\frac{n\pi b}{2b}}\right) \sinh\frac{n\pi y}{2b}$$

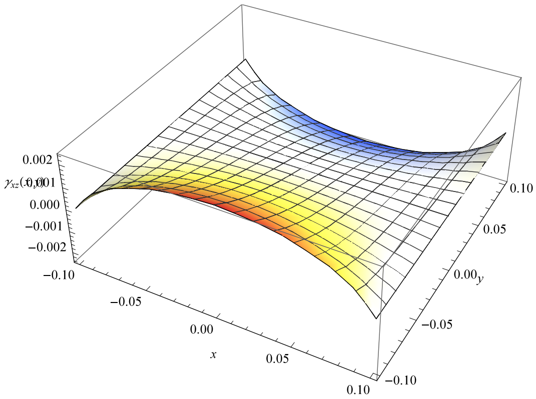


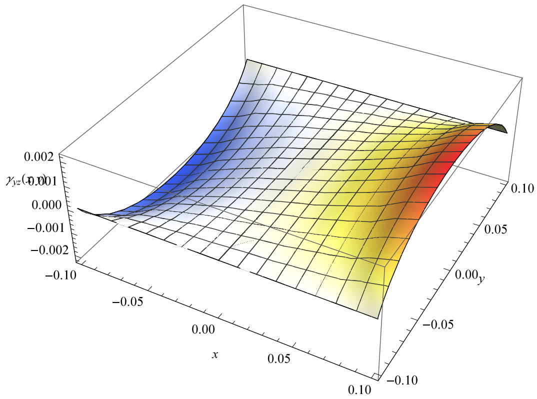


legnagyobb nyírófeszültség pedig τ_{max}:

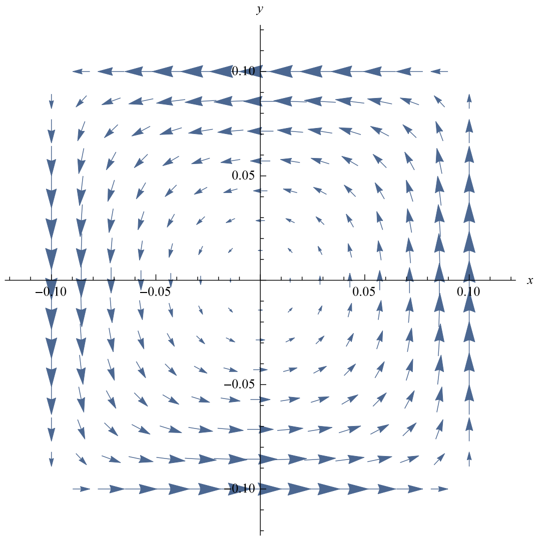
$$\tau_{max} = \frac{16G\theta a}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5...}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(1 - \frac{1}{\cosh\frac{n\pi b}{2a}}\right) = 2349.75kN/m^2 = 0.23498MPa$$

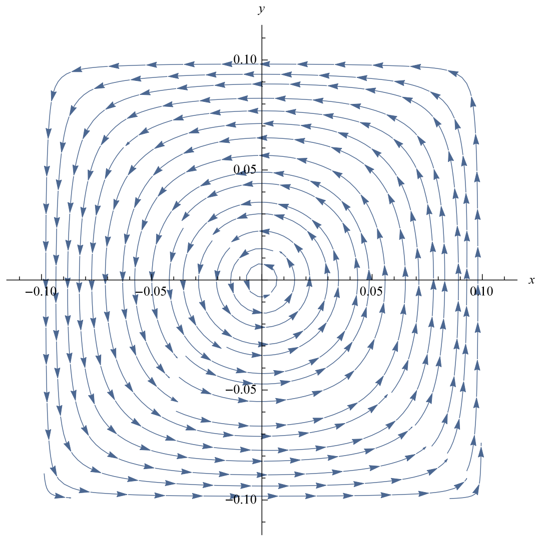
szögtorzulást γ_{xz} és γ_{yz} bemutató alábbi ábrákon megfigyelhető a keresztmetszet x és y irányú elmozdulása, vagyis a keresztmetszet öblösödése



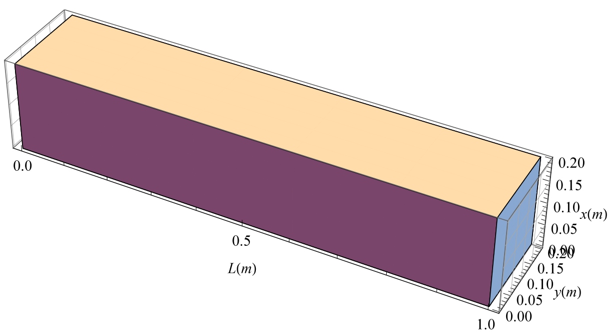


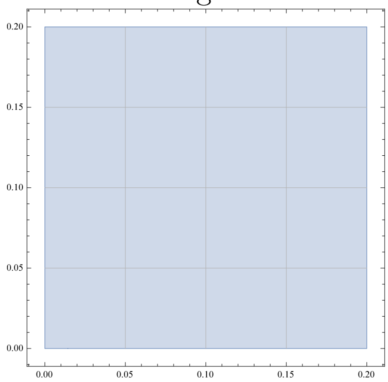
vektormező diagrammokon a keresztmetszet adott pontjaiban fellépő feszültségek nagyságát és irányítását szemlélteti:

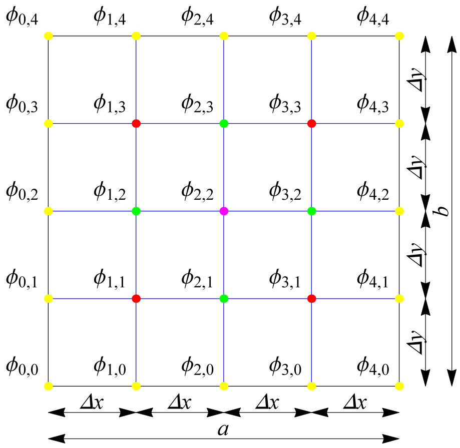




A numerikus megoldások közül a véges differenciák módszerét alkalmazva oldjuk meg a feladatot. Az első lépés a tartomány felosztása, vagyis a keresztmetszet ráccsal történő lefedése. A számítások során $n \times m = 4 \times 4$ sűrűségű rácsot használunk:







$$a = 0.2m$$
$$b = 0.2m$$
$$m = 4$$
$$n = 4$$
$$\Delta x = \frac{a}{m} = \frac{0.2}{4} = 0.05m$$
$$\Delta y = \frac{b}{n} = \frac{0.2}{4} = 0.05m$$

a torzulási függvény $\phi_{i,j}$ értékeit az (i, j) csomópontokban a (3.6) képlet alapján határozható meg. Minden egyes belső csomópontra külön algebrai egyenletet írunk fel, a peremen lévő csomópontokban pedig az (2.5) peremfeltételeknek megfelelően a torzulási függvény értékére zérust veszünk:

- csomópont $\phi_{1,1}$

$$\frac{1}{0.05^2}(\phi_{2,1} - 2\phi_{1,1} + \phi_{0,1}) + \frac{1}{0.05^2}(\phi_{1,2} - 2\phi_{1,1} + \phi_{1,0}) = -2G\theta$$
$$400\phi_{2,1} - 800\phi_{1,1} + 400\phi_{1,2} - 800\phi_{1,1} = -34900$$
$$400\phi_{2,1} - 1600\phi_{1,1} + 400\phi_{1,2} = -34900$$

- csomópont $\phi_{2,1}$

$$\frac{1}{0.05^2}(\phi_{3,1} - 2\phi_{2,1} + \phi_{1,1}) + \frac{1}{0.05^2}(\phi_{2,2} - 2\phi_{2,1} + \phi_{2,0}) = -2G\theta$$
$$400\phi_{3,1} - 800\phi_{2,1} + 400\phi_{1,1} + 400\phi_{2,2} - 800\phi_{2,1} = -34900$$
$$400\phi_{3,1} - 1600\phi_{2,1} + 400\phi_{1,1} + 400\phi_{2,2} = -34900$$

- csomópont $\phi_{3,1}$

$$\frac{1}{0.05^2}(\phi_{4,1} - 2\phi_{3,1} + \phi_{2,1}) + \frac{1}{0.05^2}(\phi_{3,2} - 2\phi_{3,1} + \phi_{3,0}) = -2G\theta$$
$$-800\phi_{3,1} + 400\phi_{2,1} + 400\phi_{3,2} - 800\phi_{3,1} = -34900$$
$$-1600\phi_{3,1} + 400\phi_{2,1} + 400\phi_{3,2} = -34900$$

- csomópont $\phi_{1,2}$

$$\frac{1}{0.05^2}(\phi_{2,2} - 2\phi_{1,2} + \phi_{0,2}) + \frac{1}{0.05^2}(\phi_{1,3} - 2\phi_{1,2} + \phi_{1,1}) = -2G\theta$$
$$400\phi_{2,2} - 800\phi_{1,2} + 400\phi_{1,3} - 800\phi_{1,2} + 400\phi_{1,1} = -34900$$
$$400\phi_{2,2} - 1600\phi_{1,2} + 400\phi_{1,3} + 400\phi_{1,1} = -34900$$

- csomópont $\phi_{2,2}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{0.05^2}\left(\phi_{3,2}-2\phi_{2,2}+\phi_{1,2}\right)+\frac{1}{0.05^2}\left(\phi_{2,3}-2\phi_{2,2}+\phi_{2,1}\right)&=-2G\theta\\ 400\phi_{3,2}-800\phi_{1,2}+400\phi_{1,2}+400\phi_{2,3}-800\phi_{2,2}+400\phi_{2,1}&=-34900\\ 400\phi_{3,2}-1600\phi_{2,2}+400\phi_{1,2}+400\phi_{2,3}+400\phi_{2,1}&=-34900\end{aligned}$$

- csomópont $\phi_{3,2}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{0.05^2}\left(\phi_{4,2}-2\phi_{3,2}+\phi_{2,2}\right)+\frac{1}{0.05^2}\left(\phi_{3,3}-2\phi_{3,2}+\phi_{3,1}\right)&=-2G\theta\\ -800\phi_{3,2}+400\phi_{2,2}+400\phi_{3,3}-800\phi_{3,2}+400\phi_{3,1}&=-34900\\ -1600\phi_{3,2}+400\phi_{2,2}+400\phi_{3,3}+400\phi_{3,1}&=-34900\end{aligned}$$

- csomópont $\phi_{1,3}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{0.05^2}\left(\phi_{2,3}-2\phi_{1,3}+\phi_{0,3}\right)+\frac{1}{0.05^2}\left(\phi_{4,3}-2\phi_{1,3}+\phi_{1,2}\right)&=-2G\theta\\ 400\phi_{2,3}-800\phi_{1,3}-800\phi_{1,3}+400\phi_{1,2}&=-34900\\ 400\phi_{2,3}-1600\phi_{1,3}+400\phi_{1,2}&=-34900\end{aligned}$$

- csomópont $\phi_{2,3}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{0.05^2}\left(\phi_{3,3}-2\phi_{2,3}+\phi_{1,3}\right)+\frac{1}{0.05^2}\left(\phi_{2,4}-2\phi_{2,3}+\phi_{2,2}\right)&=-2G\theta\\ 400\phi_{3,3}-800\phi_{2,3}+400\phi_{1,3}-800\phi_{2,3}+400\phi_{2,2}&=-34900\\ 400\phi_{3,3}-1600\phi_{2,3}+400\phi_{1,3}+400\phi_{2,2}&=-34900\end{aligned}$$

- csomópont $\phi_{3,3}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{0.05^2}\left(\phi_{4,3}-2\phi_{3,3}+\phi_{2,3}\right)+\frac{1}{0.05^2}\left(\phi_{3,4}-2\phi_{3,3}+\phi_{3,2}\right)&=-2G\theta\\ -800\phi_{3,3}+400\phi_{2,3}-800\phi_{3,3}+400\phi_{3,2}&=-34900\\ -1600\phi_{3,3}+400\phi_{2,3}+400\phi_{3,2}&=-34900\end{aligned}$$

Mivel a példában mindkét irányban egyforma lépésközű rácsot alkalmazunk ezért $\Delta x=\Delta y=h$ és az (3.6) egyenlet a következő alakban írható fel:

$$\frac{1}{h^2}\left(\phi_{i+1,j}+\phi_{i-1,j}+\phi_{i,j+1}+\phi_{i,j-1}-4\phi_{i,j}\right)=-2G\theta \tag{4.8}$$

Mint mátrixegyenlet pedig:

$$\mathbf{A}\cdot\phi=\mathbf{f}$$

ahol az **A** mátrix egy blokk-tridiagonális mátrix

$$\mathbf{A} = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} B & -I & & & & \\ -I & B & -I & & & \\ & -I & B & -I & & \\ & & \ddots & & \ddots & \\ & & & -I & B & -I \\ & & & & -I & B \end{bmatrix}$$

az **I** az $n \times n$-es identitás és tridiagonális mátrix:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & & & & \\ -1 & 4 & -1 & & & \\ & -1 & 4 & -1 & & \\ & & \ddots & & \ddots & \\ & & & -1 & 4 & -1 \\ & & & & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Az **f** mátrix pedig:

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} -2G\theta \\ -2G\theta \\ -2G\theta \\ \vdots \\ -2G\theta \\ -2G\theta \end{bmatrix}$$

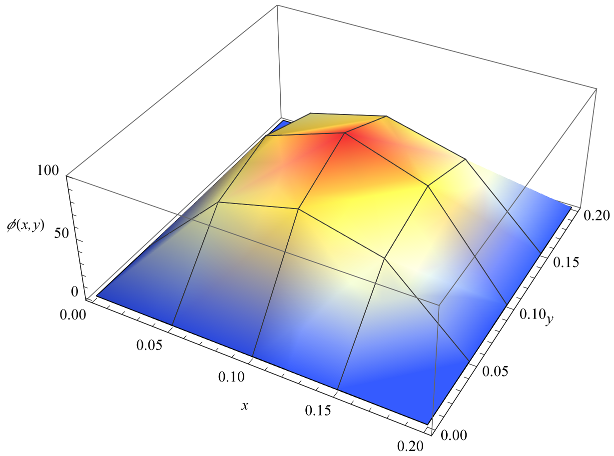
Erre az esetre a mátrix egyenlet a következőképpen irható fel:

$$\frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \phi_{1,1} \\ \phi_{2,1} \\ \phi_{3,1} \\ \phi_{1,2} \\ \phi_{2,2} \\ \phi_{3,2} \\ \phi_{1,3} \\ \phi_{2,3} \\ \phi_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2G\theta \\ -2G\theta \\ -2G\theta \\ -2G\theta \\ -2G\theta \\ -2G\theta \\ -2G\theta \\ -2G\theta \\ -2G\theta \end{bmatrix}$$

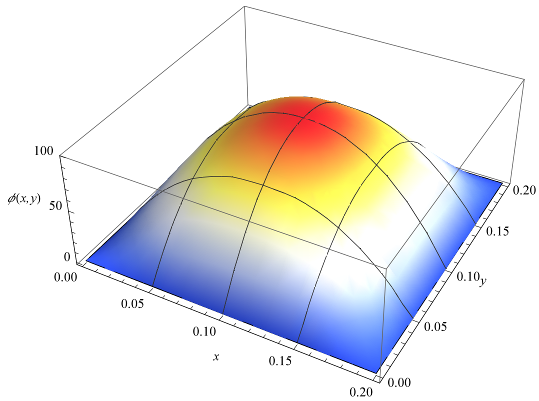
A mátrixegyenlet megoldásával, vagyis a lineáris egyenletrendszer megoldásával a torzulási függvény $\phi_{i,j}$ csomóponti értékeit határozzuk meg:

$$\phi_{1,1} = 59.9844; \quad \phi_{2,1} = 76.3438; \quad \phi_{3,1} = 59.9844$$
$$\phi_{1,2} = 76.3438; \quad \phi_{2,2} = 98.1563; \quad \phi_{3,2} = 76.3438$$
$$\phi_{1,3} = 59.9844; \quad \phi_{2,3} = 76.3438; \quad \phi_{3,3} = 59.9844$$

torzulási függvény $\phi(x, y)$ diszkrét felületként grafikusan ábrázolva:



a diszkrét pontokból interpolációs módszert alkalmazva folytonos felületet állítunk elő vagyis megkapjuk a torzulási függvény $\phi(x, y)$ folytonos alakját:



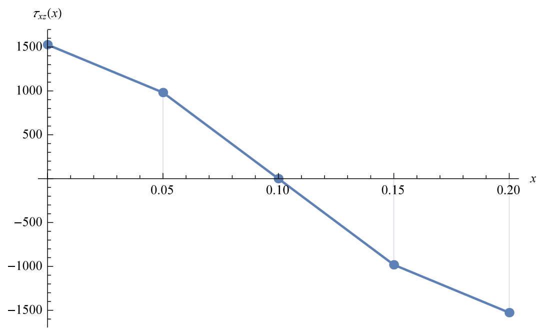
Amikor meghatároztuk a torzulási függvénynek $\phi_{i,j}$ a csomóponti értékeit, akkor ezekből az adatokból meg tudjuk határozni a nyírófeszűltség τ_{xz} és a τ_{yz} értékeit a csomópontokban. Mivel az (2.2) egyenlet egy egyváltozós parciális differencíjál egyenlet, ezt is véges differenciák módszerével oldjuk meg:

$$\tau_{yz;i,j} = -\frac{\phi_{i+1,j} - \phi_{i-1,j}}{2\Delta x}; \quad \tau_{xz;i,j} = -\frac{\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j-1}}{2\Delta y} \tag{4.9}$$

érdemes megjegyeznünk, hogy a tartomány határán az egyenletet (4.9) alkalmazva nagy eltérések jelentkezhetnek.

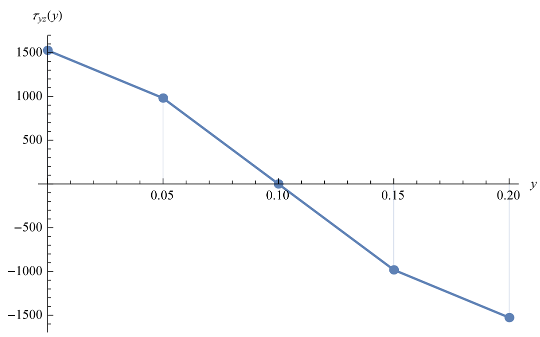
az x irányú nyírófeszültség τ_{xz}:

$$\tau_{xz;0,2} = \frac{\phi_{1,2}}{\Delta x} = \frac{76.3438}{0.05} = 1526.876 kN/m^2$$
$$\tau_{xz;1,2} = \frac{\phi_{2,2} - \phi_{0,2}}{2\Delta x} = \frac{98.1563 - 0}{2 \cdot 0.05} = 981.563 kN/m^2$$
$$\tau_{xz;2,2} = \frac{\phi_{3,2} - \phi_{1,2}}{2\Delta x} = \frac{76.3438 - 76.3438}{2 \cdot 0.05} = 0 kN/m^2$$
$$\tau_{xz;3,2} = \frac{\phi_{4,2} - \phi_{2,2}}{2\Delta x} = \frac{0 - 98.1563}{2 \cdot 0.05} = -981.563 kN/m^2$$
$$\tau_{xz;4,2} = \frac{-\phi_{3,2}}{\Delta x} = \frac{-76.3438}{0.05} = -1526.876 kN/m^2$$



az y irányú nyírófeszültség pedig τ_{yz}:

$$\tau_{yz;2,0} = -\frac{\phi_{2,1}}{\Delta x} = -\frac{76.3438}{0.05} = -1526.876 kN/m^2$$
$$\tau_{yz;2,1} = -\frac{\phi_{2,2} - \phi_{2,0}}{2\Delta x} = -\frac{98.1563 - 0}{2 \cdot 0.05} = -981.563 kN/m^2$$
$$\tau_{yz;2,2} = -\frac{\phi_{2,3} - \phi_{2,1}}{2\Delta x} = -\frac{76.3438 - 76.3438}{2 \cdot 0.05} = 0 kN/m^2$$
$$\tau_{yz;2,3} = -\frac{\phi_{2,4} - \phi_{2,2}}{2\Delta x} = -\frac{0 - 98.1563}{2 \cdot 0.05} = 981.563 kN/m^2$$
$$\tau_{yz;2,4} = -\frac{-\phi_{2,3}}{\Delta x} = -\frac{-76.3438}{0.05} = 1526.876 kN/m^2$$



A mérnöki gyakorlatban azonban a legnagyobb nyírófeszültség meghatározására általában elég ha interpolációs polinomot használunk három csomóponton keresztül:

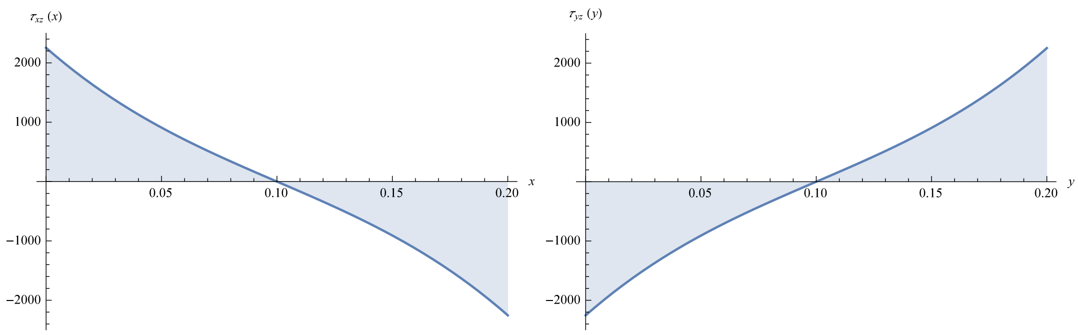
$$\tau_{zx} = -\frac{-3\phi_{0,2} + 4\phi_{1,2} - \phi_{2,2}}{2\Delta x} = -\frac{-3 \cdot 0 + 4 \cdot 76.3438 - 98.1563}{2 \cdot 0.05} = -2072.189kN/m^2$$

$$\tau_{zy} = \frac{-3\phi_{2,0} + 4\phi_{2,1} - \phi_{2,2}}{2\Delta x} = \frac{-3 \cdot 0 + 4 \cdot 76.3438 - 98.1563}{2 \cdot 0.05} = 2072.189kN/m^2$$

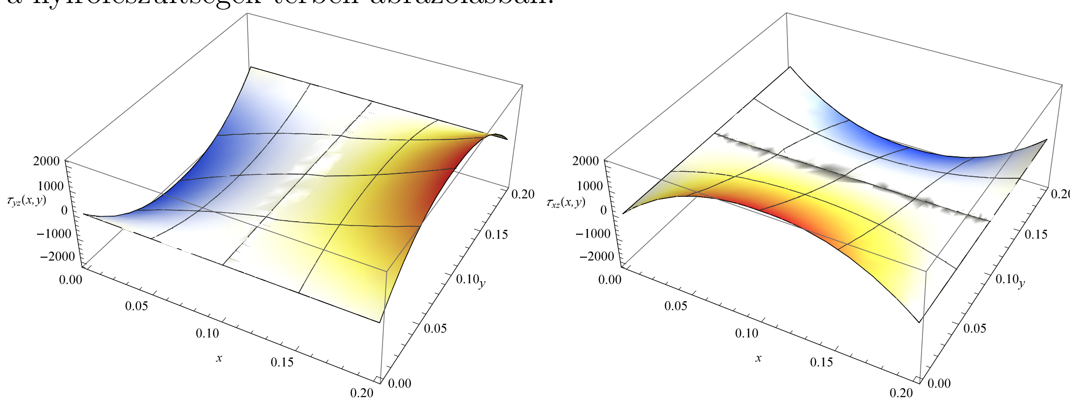
A nyíró feszültségek τ_{zx} és a τ_{zy} pontosabb meghatározása érdekében azonban érdemes a torzulási függvény folyamatos felületként történő használata, vagyis ha megkeressük az első parciális deriváltját x és y szerint, lényegesebben pontosabb megoldást kapunk:

$$\tau_{xz}(x) = 2253.96x - 17086.5x^2 + 58166.7x^3 - 145417x^4$$

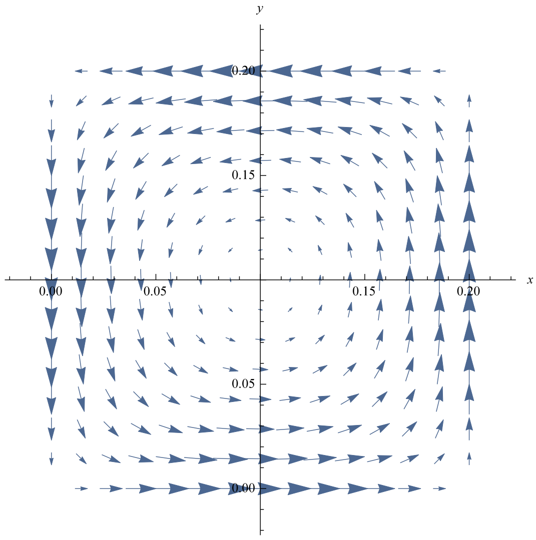
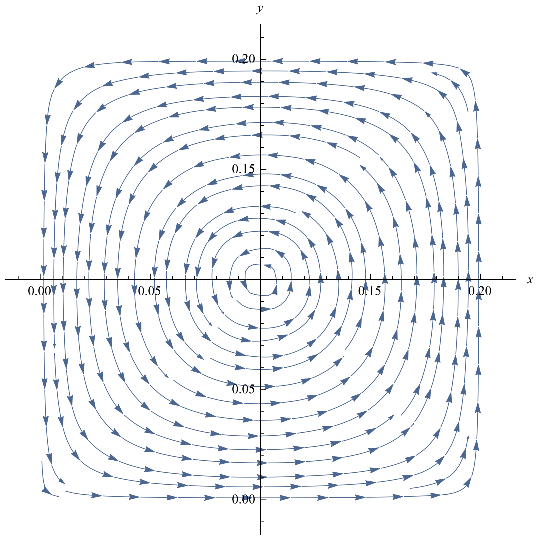
$$\tau_{yz}(y) = 2253.96y - 17086.5y^2 + 58166.7y^3 - 145417y^4$$



a nyírófeszültségek térbeli ábrázolásban:



vektormező diagrammon bemutatva:

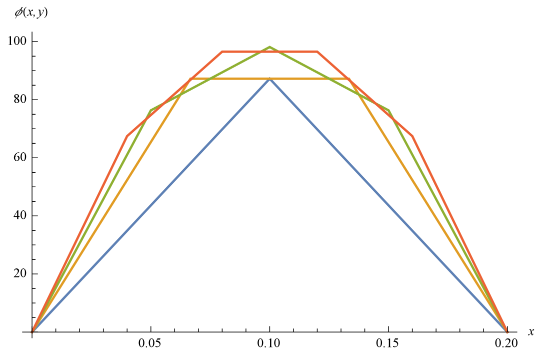



a csavarónyomatékot M_t pedig a (2.3) képlet alapján diszkrét alakban:

$$M_t = 2\int\int \phi(x,y)dxdy = 2\cdot\sum_{i=1}^{n}\phi_{i,j}\frac{(2\Delta x\Delta y)^2}{3}$$

$$M_t = 0.1406\cdot(2a)^4 G\theta = 0.1406\cdot(2\cdot 0.1)^4\cdot 10^6\cdot 0.01745 = 3.925552kNm$$

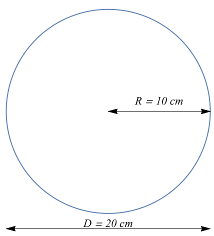
különböző rácssűrűség mellet megfigyelhető a véges differencia módszer pontossága



A véges differenciák módszerét általános alakú tartomány esetén egy kör keresztmetszetű rúdelem csavarásán keresztül mutatom be.

4.2. Példa. Vegyünk egy $l = 1.0m$ hosszúságú és $d = 0.1m$ átmérőjű kör keresztmetszetű rudat melyet szögelfordulás $\theta = 0.01745rad$ terhel. Számítsuk ki a csavarónyomaték értékét M_t, valamint a nyírófeszültségeket τ_{xz} és τ_{yz} is.

Az analitikus megoldásra az elemi szilárdságtanban ismert összefüggéseket alkalmazva csavarónyomaték M_t értékét a következő képletekkel számíthatjuk:



$$R = 0.1m$$

$$M_t = G\cdot\theta\cdot\pi\cdot\frac{R^4}{2}$$

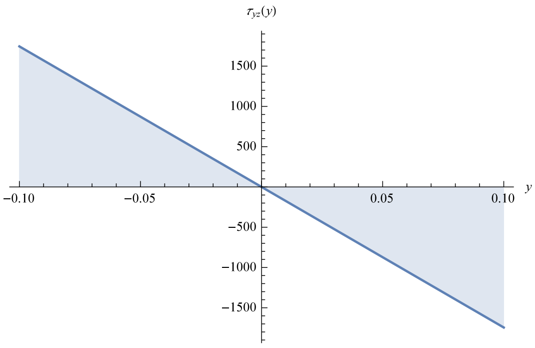
$$= 10^6\cdot 0.01745\cdot\pi\cdot\frac{0.1^4}{2} = 2.74103959kNm$$

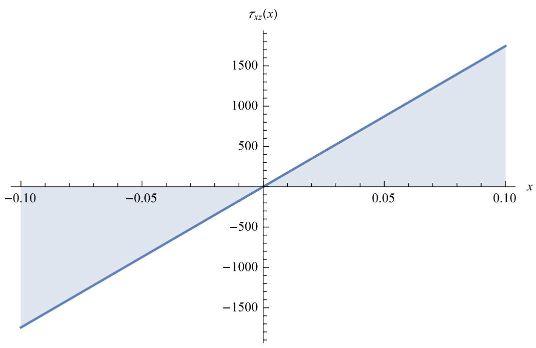
a nyírófeszültségek τ_{zx} és τ_{zy}, a diagrammokon látható, hogy egyrészt lineáris az eloszlásuk a keresztmetszeten, illetve, hogy a kör keresztmetszetű rudak'csavarásánál nem jelentkezik öblösödés:

$$\tau_{xz} = -G \cdot \theta \cdot y = -10^6 \cdot 0.01745 \cdot 0.1 = -1745kN/m^2 = -0.1745MPa$$

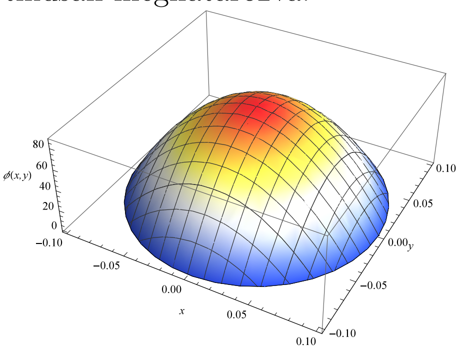
$$\tau_{yz} = G \cdot \theta \cdot x = 10^6 \cdot 0.01745 \cdot 0.1 = 1745kN/m^2 = 0.1745MPa$$

$$\tau_{xz} = -17450x, \quad \tau_{yz} = 17450y$$



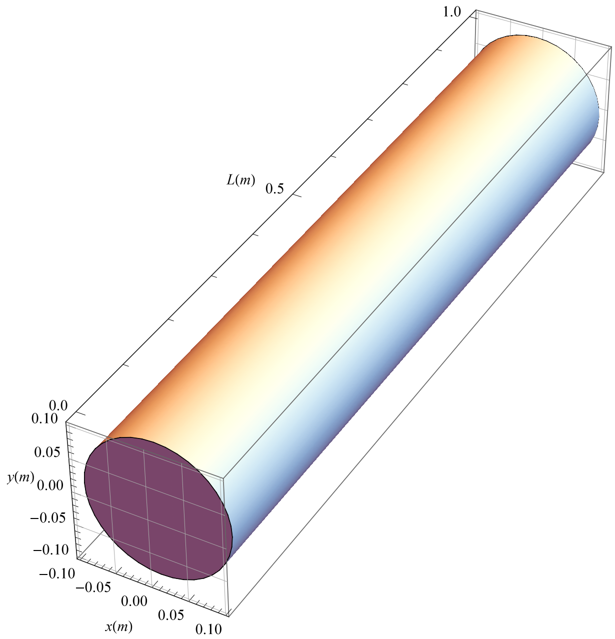


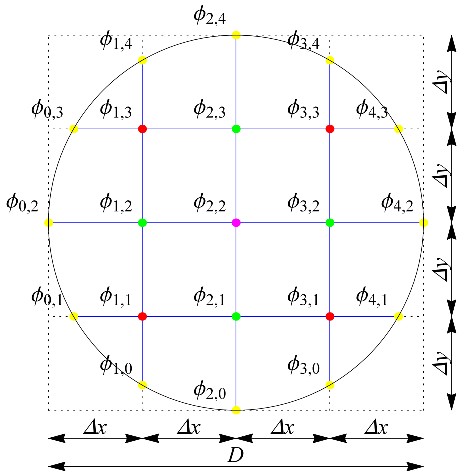
míg a torzulási függvény $\phi(x, y)$ a kör keresztmetszetű tartóra vonatkoztatva analitikusan meghatározva:



$$\begin{aligned}\phi(x, y) &= \frac{1}{2} \cdot G \cdot \theta \cdot R^2 \left(1 - \frac{x^2}{R^2} - \frac{y^2}{R^2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 10^6 \cdot 0.01745 \cdot 0.1^2 \left(1 - \frac{x^2}{0.1^2} - \frac{y^2}{0.1^2}\right) \\ &= 87.25(1 - 100x^2 - 100y^2)\end{aligned}$$

A numerikus megoldást a tartomány felosztásával kezdjük, megjegyzendő mivel a tartomány határa nem esik egybe a szélső ráccsal ezért a csomópontok nem esnek a rácsra, úgy mint az előző feladatban itt is $n \times m = 4 \times 4$ rácssűrűséget alkalmazunk:





$$D = 0.2m$$
$$m = 4$$
$$n = 4$$
$$\Delta x = \frac{a}{m} = \frac{0.2}{4} = 0.05m$$
$$\Delta y = \frac{b}{n} = \frac{0.2}{4} = 0.05m$$
$$a = b = 0.7321m$$

A torzulási függvény csomópontokban történő meghatározásához a (**??**) képlet alapján:

- csomópont $\phi_{1,1}$

$$\frac{2}{0.05^2}\left(\frac{1}{0.7321(1+0.7321)}\phi_{0,1} + \frac{1}{1+0.7321}\phi_{2,1} - \frac{1}{0.7321}\phi_{1,1}\right) +$$
$$\frac{2}{0.05^2}\left(\frac{1}{0.7321(1+0.7321)}\phi_{1,0} + \frac{1}{1+0.7321}\phi_{1,2} - \frac{1}{0.7321}\phi_{1,1}\right) = -2G\theta$$
$$461.88\phi_{2,1} - 1092.82\phi_{1,1} + 1092.82\phi_{1,2} - 273.19\phi_{1,1} = -34900$$
$$461.88\phi_{2,1} - 2185.64\phi_{1,1} + 461.88\phi_{1,2} = -34900$$

- csomópont $\phi_{2,1}$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{0.05^2}\left(\phi_{3,1}-2\phi_{2,1}+\phi_{1,1}\right)+\frac{1}{0.05^2}\left(\phi_{2,2}-2\phi_{2,1}+\phi_{2,0}\right)=-2G\theta \\
400\phi_{3,1}-800\phi_{2,1}+400\phi_{1,1}+400\phi_{2,2}-800\phi_{2,1}=-34900 \\
400\phi_{3,1}-1600\phi_{2,1}+400\phi_{1,1}+400\phi_{2,2}=-34900
\end{aligned}$$

- csomópont $\phi_{3,1}$

$$\begin{aligned}
\frac{2}{0.05^2}\left(\frac{1}{0.7321(1+0.7321)}\phi_{4,1}+\frac{1}{1+0.7321}\phi_{2,1}-\frac{1}{0.7321}\phi_{3,1}\right)+ \\
\frac{2}{\Delta 0.05^2}\left(\frac{1}{0.7321(1+0.7321)}\phi_{4,1}+\frac{1}{1+0.7321}\phi_{3,2}-\frac{1}{0.7321}\phi_{3,1}\right)=-2G\theta \\
461.88\phi_{2,1}-1092.82\phi_{3,1}+461.88\phi_{3,2}-1092.82\phi_{3,1}=-34900 \\
461.88\phi_{2,1}-2185.64\phi_{3,1}+461.88\phi_{3,2}=-34900
\end{aligned}$$

- csomópont $\phi_{1,2}$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{0.05^2}\left(\phi_{2,2}-2\phi_{1,2}+\phi_{0,2}\right)+\frac{1}{0.05^2}\left(\phi_{1,3}-2\phi_{1,2}+\phi_{1,1}\right)=-2G\theta \\
400\phi_{2,2}-800\phi_{1,2}+400\phi_{1,3}+400\phi_{1,2}-800\phi_{1,1}=-34900 \\
400\phi_{2,2}-1600\phi_{1,2}+400\phi_{1,3}+400\phi_{1,1}=-34900
\end{aligned}$$

- csomópont $\phi_{2,2}$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{0.05^2}\left(\phi_{3,2}-2\phi_{2,2}+\phi_{1,2}\right)+\frac{1}{0.05^2}\left(\phi_{2,3}-2\phi_{2,2}+\phi_{2,1}\right)=-2G\theta \\
400\phi_{3,2}-800\phi_{2,2}+400\phi_{1,2}+400\phi_{2,3}-800\phi_{2,2}+400\phi_{2,1}=-34900 \\
400\phi_{3,2}-1600\phi_{2,2}+400\phi_{1,2}+400\phi_{2,3}+400\phi_{2,1}=-34900
\end{aligned}$$

- csomópont $\phi_{3,2}$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{0.05^2}\left(\phi_{4,2}-2\phi_{3,2}+\phi_{2,2}\right)+\frac{1}{0.05^2}\left(\phi_{3,3}-2\phi_{3,2}+\phi_{3,1}\right)=-2G\theta \\
-800\phi_{3,2}+400\phi_{2,2}+400\phi_{3,3}-800\phi_{3,2}+400\phi_{3,1}=-34900 \\
-1600\phi_{3,2}+400\phi_{2,2}+400\phi_{3,3}+400\phi_{3,1}=-34900
\end{aligned}$$

- csomópont $\phi_{1,3}$

$$\frac{2}{0.05^2}\left(\frac{1}{0.7321(1+0.7321)}\phi_{0,3}+\frac{1}{1+0.7321}\phi_{2,3}-\frac{1}{0.7321}\phi_{1,3}\right)+$$
$$\frac{2}{0.05^2}\left(\frac{1}{0.7321(1+0.7321)}\phi_{1,4}+\frac{1}{1+0.7321}\phi_{1,2}-\frac{1}{0.7321}\phi_{1,3}\right)=-2G\theta$$
$$461.88\phi_{2,3}-1092.82\phi_{1,3}+461.88\phi_{1,2}-1092.82\phi_{1,3}=-34900$$
$$461.88\phi_{2,3}-2185.64\phi_{1,3}+461.88\phi_{1,2}=-34900$$

- csomópont $\phi_{2,3}$

$$\frac{1}{0.05^2}\left(\phi_{3,3}-2\phi_{2,3}+\phi_{1,3}\right)+\frac{1}{0.05^2}\left(\phi_{2,4}-2\phi_{2,3}+\phi_{2,2}\right)=-2G\theta$$
$$400\phi_{3,3}-800\phi_{2,3}+400\phi_{1,3}-800\phi_{2,3}+400\phi_{2,2}=-34900$$
$$400\phi_{3,3}-1600\phi_{2,3}+400\phi_{1,3}+400\phi_{2,2}=-34900$$

- csomópont $\phi_{3,3}$

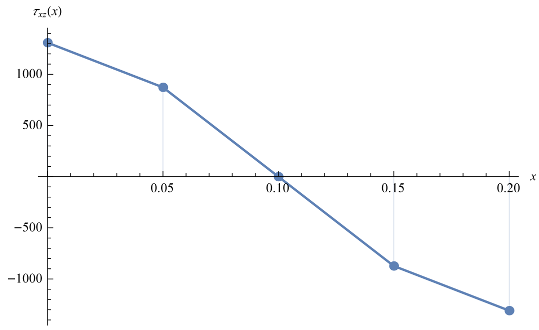
$$\frac{2}{0.05^2}\left(\frac{1}{0.7321(1+0.7321)}\phi_{0,3}+\frac{1}{1+0.7321}\phi_{2,3}-\frac{1}{0.7321}\phi_{1,3}\right)+$$
$$\frac{2}{0.05^2}\left(\frac{1}{0.7321(1+0.7321)}\phi_{3,4}+\frac{1}{1+0.7321}\phi_{2,2}-\frac{1}{0.7321}\phi_{1,3}\right)=-2G\theta$$
$$461.88\phi_{2,3}-1092.82\phi_{3,3}+461.88\phi_{3,2}-1092.82\phi_{3,3}=-34900$$
$$461.88\phi_{2,3}-2185.64\phi_{3,3}+461.88\phi_{3,2}=-34900$$

Megoldva a lineáris egyenletrendszert meghatározzuk a $\phi_{i,j}$ csomóponti értékeit:

$$\phi_{1,1}=43.6332;\quad \phi_{2,1}=65.4498;\quad \phi_{3,1}=43.6332$$
$$\phi_{1,2}=65.4498;\quad \phi_{2,2}=87.2665;\quad \phi_{3,2}=65.4498$$
$$\phi_{1,3}=43.6332;\quad \phi_{2,3}=65.4498;\quad \phi_{3,3}=43.6332$$

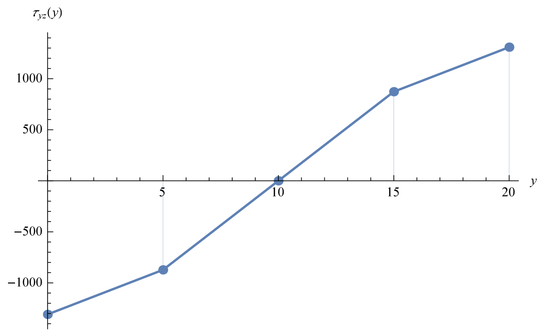
az x irányú nyírófeszültségek τ_{xz} véges differenciák módszerével a csomópontokban:

$$\tau_{xz;0,2}=\frac{\phi_{1,2}}{\Delta x}=\frac{65.4498}{0.05}=1308.996kN/m^2$$
$$\tau_{xz;1,2}=\frac{\phi_{2,2}-\phi_{0,2}}{2\Delta x}=\frac{87.2665-0}{2\cdot 0.05}=872.665kN/m^2$$
$$\tau_{xz;2,2}=\frac{\phi_{3,2}-\phi_{1,2}}{2\Delta x}=\frac{65.4498-65.4498}{2\cdot 0.05}=0kN/m^2$$
$$\tau_{xz;3,2}=\frac{\phi_{4,2}-\phi_{2,2}}{2\Delta x}=\frac{0-87.2665}{2\cdot 0.05}=-872.665kN/m^2$$
$$\tau_{xz;4,2}=\frac{-\phi_{3,2}}{\Delta x}=\frac{-65.4498}{0.05}=-1308.996kN/m^2$$



az y irányú nyírófeszültségek τ_{yz} pedig a csomópontokban:

$$\tau_{yz;2,0} = -\frac{\phi_{2,1}}{\Delta x} = -\frac{65.4498}{0.05} = -1308.996kN/m^2$$
$$\tau_{yz;2,1} = -\frac{\phi_{2,2} - \phi_{2,0}}{2\Delta x} = -\frac{87.2665 - 0}{2 \cdot 0.05} = -872.665kN/m^2$$
$$\tau_{yz;2,2} = -\frac{\phi_{2,3} - \phi_{2,1}}{2\Delta x} = -\frac{65.4498 - 65.4498}{2 \cdot 0.05} = 0kN/m^2$$
$$\tau_{yz;2,3} = -\frac{\phi_{2,4} - \phi_{2,2}}{2\Delta x} = -\frac{0 - 87.2665}{2 \cdot 0.05} = 872.665kN/m^2$$
$$\tau_{yz;2,4} = -\frac{-\phi_{2,3}}{\Delta x} = -\frac{-65.4498}{0.05} = 1308.996kN/m^2$$



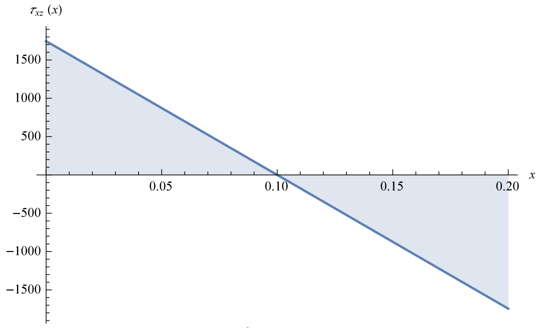
A mérnöki gyakorlatban azonban a legnagyobb nyírófeszültség meghatározására álltalában elég ha interpolációs polinomot használunk három csomóponton keresztűl:

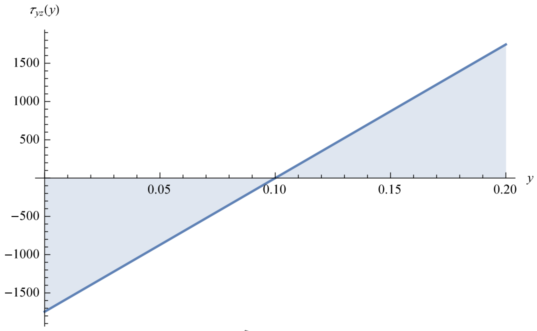
$$\tau_{zx} = -\frac{-3\phi_{0,2} + 4\phi_{1,2} - \phi_{2,2}}{2\Delta x} = -\frac{-3 \cdot 0 + 4 \cdot 65.4498 - 87.2665}{2 \cdot 0.05} = -1745.33kN/m^2$$
$$\tau_{zy} = \frac{-3\phi_{2,0} + 4\phi_{2,1} - \phi_{2,2}}{2\Delta x} = \frac{-3 \cdot 0 + 4 \cdot 65.4498 - 87.2665}{2 \cdot 0.05} = 1745.33kN/m^2$$

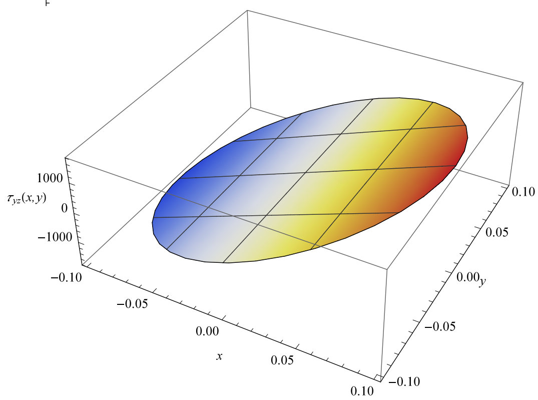
A nyíró feszültségek τ_{zx} és a τ_{zy} pontosabb meghatározása érdekében azonban érdemes a torzulási függvény folyamatos felületként történő használata, vagyis ha a megkeressük az első parcijális deriváltját x és y szerint, lényegesebben pontosabb megoldást kapunk:

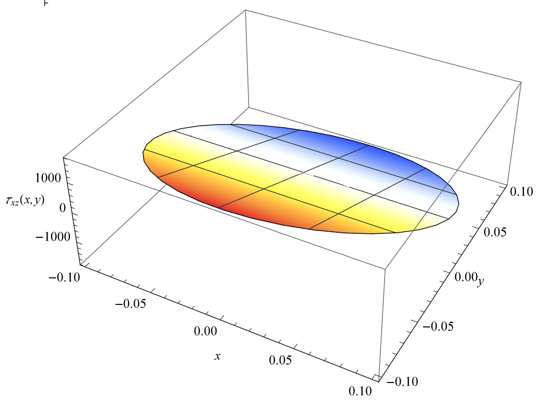
$$\tau_{xz}(x) = 1745.33x - 8726.65x^2 - 9.88268 \cdot 10^{-6}x^3 + 0.0000247067x^4$$
$$\tau_{yz}(y) = 1745.33y - 8726.65y^2 - 9.88268 \cdot 10^{-6}y^3 + 0.0000247067y^4$$

Ezeken az ábrákon is jól megfigyelhető a nyírófeszűltségek majdnem lineáris elrendeződése:

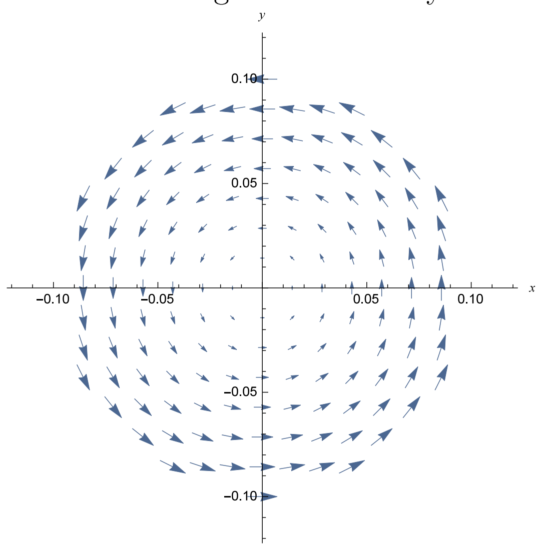


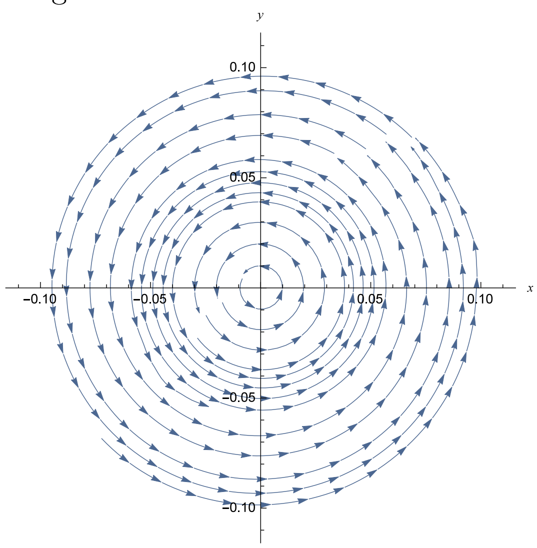






vektormező diagrammokon a nyírófeszűltség bemutatva





5. Összegzés

A munkámmal azt szerettem volna bebizonyítani, és a bizonyítás szerintem sikerrel is járt, miszerint a viszonylag kis csomóponti sűrűségnél, a véges differenciák módszerével igen pontos eredményeket kaphatunk. Ezzel lehetővé téve a gyakorló mérnökök számára egy gyors és egyszerű módszert, akár az ellenőrzésre is. Mivel a csavarással terhelt rudak esetére analitikus megoldás csak bizonyos keresztmetszetekre alkalmazható, ezért a dolgozatommal arra szeretnék rámutatni, hogy hogyan lehet alkalmazni a numerikus módszerek sokoldalúságát, melyekkel akár összetett keresztmetszetű rudak csavarási vizsgálata is lehetővé válik. Munkám mellett szóló legfőbb érv és előny, az egyszerűségben és a sokoldalúságban rejlik.

Irodalom

[1] Š. Dunica, Ž. Bojović, *Zbirka rešenih zadataka iz otpornost materijala sa izvodima iz teorije*, Naučna Knjiga, Beograd, 1984.

[2] Š. Dunica, *Otpornost materijala*, Gradjevinska knjiga, Beograd, 2009.

[3] V. Brčić, *Otpornost materijala*, Gradjevinska knjiga, Beograd, 1978.

[4] G. Csikós Pajor, H. Péics, *Analízis, elméleti összefoglaló és példatár*, Bolyai Farkas Alapítvány, Zenta, 2010.

[5] M. Gojković, *Drvene konstrukcije*, Naučna knjiga, Beograd, 1983.

[6] B. Katalin, K. Flórián, *Szilárdságtan*, Óravázlat, Budapest, 2012.