A GPS rendszer (Global Positioning System) matematikai modellezése

VMTDK dolgozat

Guzsvány Szilvia

Témavezető: Dr. Szöllőssy Dóra

Újvidék, 2020

Bevezetés

Sokunknak fel sem tűnik, hogy mobiltelefonunk térkép alkalmazása a pillanatnyi helyzetünket mutatja induláskor. Vajon mi minden történik az indítás utáni másodpercekben? Hogyan találja meg magát a telefonom a térképen? Ezekre a kérdésekre ad választ ez a dolgozat, azzal, hogy bemutatja a GPS vagyis a Globális Helymeghatározó Rendszer működését és annak matematikai hátterét.

1. Történelmi áttekintés

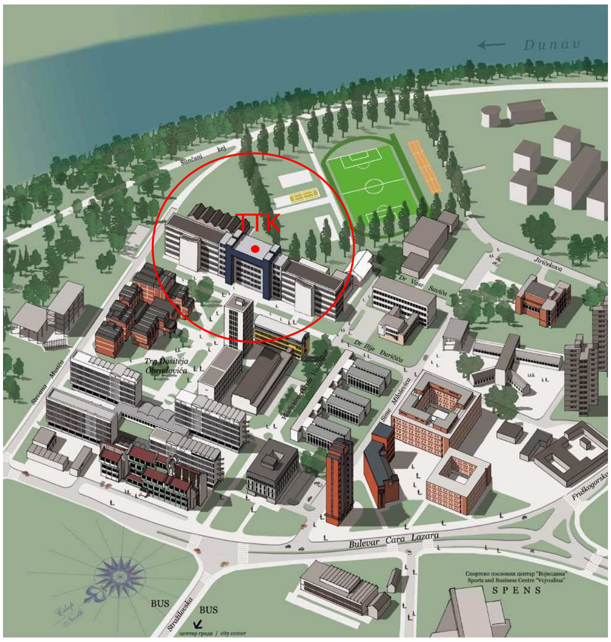
Az emberek már ősidők óta tudják, hogy a pontos helymeghatározáshoz a Földet kívülről kell szemlélni. Nyílt terepen vagy a tengereken, óceánon, ahol az égbolt látható volt, az ember a csillagok segítségével tájékozódott. Természetesen a tájékozódáshoz és helymeghatározáshoz pontos eszközökre és módszerekre volt szükség. Már az ókorban megjelent az *asztrolábium*, vagyis csillagóra, mely az első olyan eszközök közé tartozik, ami segítségével meghatározható elhelyezkedésünk földrajzi hosszúsága a pontos dátum és idő vagy egy napi csillagászati esemény ismeretében. De térjünk vissza a modern korba, és tekintsük át a Globális Helymeghatározó Rendszer – továbbiakban GPS – létrejöttének fontosabb állomásait:

- 1957-ben a Szovjetunió kilőtte az űrbe a Sputnik műholdat. Pár nappal később amerikai tudósok lekövették a műhold pályáját a műhold rádiófrekvencia-változása alapján.
- 1960-as években az Amerikai Haditengerészet kifejlesztett egy tíz műholdból álló navigációs rendszert tengeralattjáró flottájához. A rendszer egyik nagy hátránya a műhold jeleinek vételi ideje volt, ami órákig is eltarthatott. Ez korlátozta a megoldás alkalmazhatóságát.
- 1970-es évek elején amerikai tudósok a folytonos helymeghatározáson dolgozva létrehozták a mai GPS rendszer ősét, a NAVSTART GPS rendszert 1973-ban.
- 1978-ban az amerikai hadsereg kilövi az első GPS műholdat.
- 1980-ban aktiválják az atomórákat a műholdakon.
- 1983-ban egy repülőgép-katasztrófa miatt az Egyesült Államok feloldja a GPS rendszer titkosítását, és engedélyezi a GPS rendszer használatát polgári célokra is.
- 1995-ben a 24 műholdból álló GPS konstelláció teljes mértékű működését jelentik be.
- 2000-ben a GPS rendszer polgári célra engedélyezett pontosságát 100 méterről 10-15 méterre növelik. Ez az esemény a GPS vevő készülékek robbanásszerű elterjedését váltja ki.

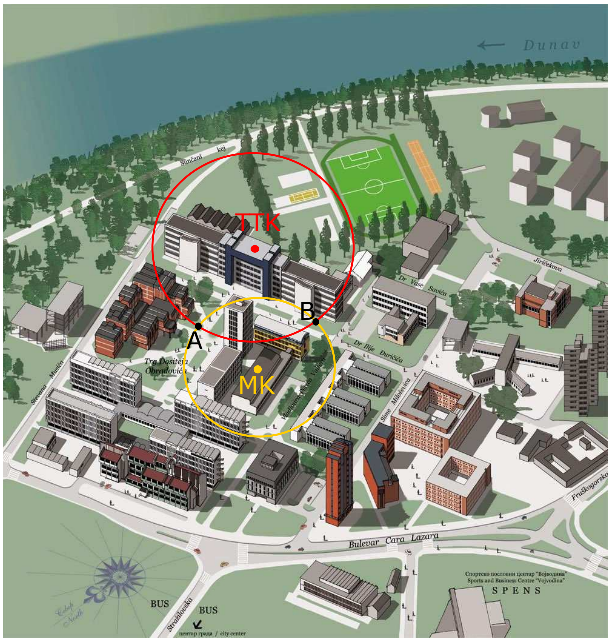
- 2005-ben a már meglévő 24 műhold mellé 8 tartalék műholdat lőnek fel, arra az esetre ha az aktív műholdak közül valamelyik meghibásodna.

2. Helyzetmeghatározás két dimenzióban

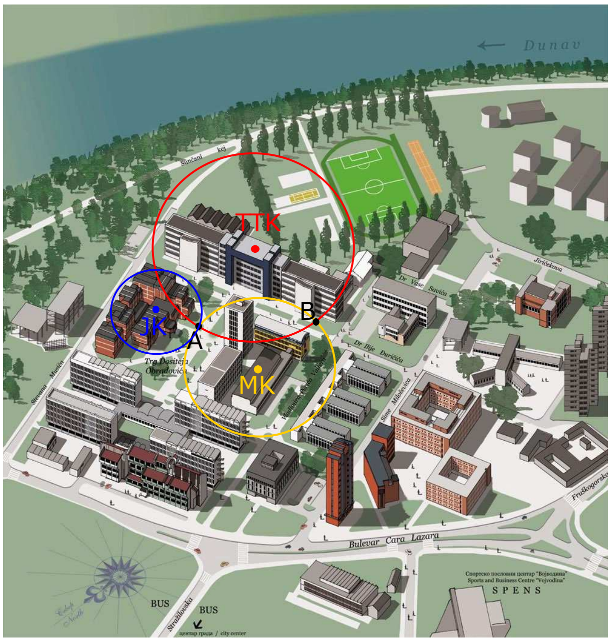
Képzeljük el, hogy eltévedtünk a kampuszon, és csak egy térkép van nálunk. Hogyan tudjuk kideríteni a pontos helyzetünket? Odamegyünk az első járókelőhöz és megkérdezzük, hogy hol vagyunk. Ezt a választ kapjuk: "*500 méterre vagy a Természettudományi-matematikai Kartól.*" Ez nem túl sok segítség, de ennek ellenére rajzolunk egy 500 méter sugarú piros kört a TTK köré a térképen, ahogy az ábra is mutatja.



Valahol ezen a körvonalon vagyunk. A következő járókelőtől megtudjuk, hogy 375 méterre vagyunk a Műszaki Kartól. Ekkor az MK köré rajzolunk egy 375 méter sugarú kört sárga színnel. Az így kapott köröknek két metszéspontja van, az A és a B pont (lásd az ábrát). Már csak azt kell kitalálni, hogy az A vagy a B pontban vagyunk-e.



Ahhoz, hogy meg tudjuk határozni a pontos helyünket, szükségünk lesz egy harmadik járókelő segítségére is. Ám a harmadik járókelőtől azt kell megkérdezni, hogy hány méterre vagyunk a Jogi Kartól. Ő azt mondja, hogy onnan 200 méterre vagyunk. Ekkor megrajzoljuk a kék színű 200 méter sugarú kört is, a Jogi Kar köré, amiből megkapjuk a pontos helyünket, ami a három kör metszéspontjában, a mi példánkban az A pontban van.



Természetesen, hogy ez a módszer működjön, több dologra van szükségünk. Először is arra, hogy a járókelők meg tudják mondani a pontos távolságot. Másodszor fontos, hogy a térképen jól rajzoljunk, de az is nagyon fontos, hogy a harmadik járókelőnek jó kérdést tegyünk fel.

Ez a példa jól szemlélteti, hogy a 2-dimenziós esetben a pontos helyünk meghatározásához három épületre, illetve az épületektől mért távolságokra van szükségünk. A GPS rendszer hasonlóan működik, csak 3-dimenzióban, a járókelők helyett műholdakkal kommunikálunk, és a műholdak távolságaival számolunk. Mivel azonban eggyel több dimenzióban kell feltalálnunk magunkat, ezért eggyel több információra lesz szükségünk. Geometriai értelemben a GPS a térbeli ívmetszés feladatát oldja meg.

3. A GPS konstelláció és a GPS működése

Ahhoz, hogy a térbeli helyzetünket meghatározzuk, szükségünk van arra, hogy kiválasszuk azt a koordináta-rendszert, amelyet használni fogunk. Kézenfekvő egy olyan koordináta-rendszert választani, amely Föld-centrikus és a Földhöz viszonyítva fixált. Legyen a koordináta-rendszer origója a Föld tömegközéppontjában, az x-tengely az egyenlítő síkján haladjon át, az északi és déli sark a z-tengelyen helyezkedjen el, valamint az xz-sík a tartalmazza a greenwichi kezdőmeridiánt. Emellett az xyz koordináta-rendszer legyen derékszögű. Ezzel azt a Descartes-féle, koordináta-rendszert definiáltunk, amelyet a GPS rendszer használ. Az így kapott koordinátákat később át kell alakítanunk földrajzi koordinátákra (szélesség, hosszúság és magasság alakba).

A GPS rendszer egy 24 műholdból álló konstelláció, amelyben hat pályán, pályánként négy műhold kering. Ezek a műholdak 20000 km magasságban keringenek úgy, hogy naponta kétszer megkerülik a Földet. Elhelyezkedésük pedig olyan, hogy minden pillanatban a Föld bármegy pontjáról legalább négy látszódjon egyszerre. Ezek a műholdak segítenek a helymeghatározásban.

A műholdak folyamatosan sugározzák a helymeghatározáshoz elengedhetetlen információkat:

- egy pszeudo-random kódot, mely a műhold azonosításához szükséges a műhold mozgásának függvényében
- részletes információt a műhold által bejárt pályáról, vagyis arról, hogy a műhold hol kellene hogy legyen bármelyik pillanatban, emellett tartalmazza a pontos dátumot és időt (atomóra pontossággal)
- a többi műhold helyét bármelyik pillanatban.

A GPS műholdak által sugárzott jelek a fény sebességével érkeznek a GPS vevőhöz. Mivel a műholdak a Földhöz képest különböző távolságra helyezkednek el, a különböző műholdak jelei kis különbséggel érkeznek meg a vevőhöz. A jel vétele után a GPS vevő azonosítja a műholdat, megjegyzi a jel küldésének időpontját ω (amit szintén a műhold küld) és a fogadott jelsorozat periódusát. Ezzel egyidőben a vevő elindítja a saját belső óráját ω idővel, és "megindul" a pszeudo-random kódsorozaton, amíg a műholdtól meg nem érkezik a kódsorozat következő eleme. Amikor a következő kód megérkezik, a vevőn és a műholdtól vett jelsorozatban az időpontok nem fognak megegyezni. A különbség, t az az idő, amely alatt a műholdról érkező jel eléri a vevőt. Ezt az időt a vevőkészülék számítógépe megszorozza a $c = 299792458m/sec$ fénysebességgel, ezáltal megkapjuk a műholdtól való távolságunkat.

A GPS vevőkészülék egyszerre legfeljebb négy műholddal tud kommunikálni. A vevőkészülék, amint megkapja az információt az S_1, S_2, S_3 és S_4 műholdakról kiszámolja a d_1, d_2, d_3 és d_4 távolságokat. Minden S_i műhold koordinátája $(a_i, b_i, c_i), i = 1, ..., 4$. Ekkor a műholdak köré rajzolt gömbök egyenletei:

$$\begin{aligned}
(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 + (z-c_1)^2 &= d_1^2 = c^2t_1^2 \\
(x-a_2)^2 + (y-b_2)^2 + (z-c_2)^2 &= d_2^2 = c^2t_2^2 \\
(x-a_3)^2 + (y-b_3)^2 + (z-c_3)^2 &= d_3^2 = c^2t_3^2 \\
(x-a_4)^2 + (y-b_4)^2 + (z-c_4)^2 &= d_4^2 = c^2t_4^2.
\end{aligned}$$

Ebben a pillanatban úgy tűnhet, hogy a probléma már meg is van oldva, hiszen a vevőkészülékben lévő óra legfeljebb a másodperc töredékét hibázhatja. Viszont azt is észben kell tartani, hogy a jelsorozat fénysebességgel érkezik a vevőkészülékbe, és bármennyire is kicsi a hiba, azt a $c^2t_i^2$ felerősíti. Ezt elkerülendő kerülnek a műholdakba atomórák. Ezek az atomórák egymással teljesen szinkronban működnek, ezért a GPS vevő által tapasztalt időeltérés bármelyik műholdhoz képest egyenlő. Ezt az időeltérést jelöljük ξ-vel. Amennyiben ξ_1 a GPS jel fogadási ideje a vevőkészülék órája szerint, és ξ_2 ugyanazon jel fogadási ideje az atomóra szerint, akkor $\xi = \xi_1 - \xi_2$ az időeltérés mértéke, amely a műholdaktól független.

Ez alapján az egyenletrendszerünket a következőképp módosíthatjuk:

$$\begin{aligned}
(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 + (z-c_1)^2 = d_1^2 = c^2(t_1-\xi)^2 \\
(x-a_2)^2 + (y-b_2)^2 + (z-c_2)^2 = d_2^2 = c^2(t_2-\xi)^2 \\
(x-a_3)^2 + (y-b_3)^2 + (z-c_3)^2 = d_3^2 = c^2(t_3-\xi)^2 \\
(x-a_4)^2 + (y-b_4)^2 + (z-c_4)^2 = d_4^2 = c^2(t_4-\xi)^2.
\end{aligned}$$

Ez egy négy ismeretlenes egyenletrendszer melyet megoldva megkapjuk a pontos helyünket. Mivel ez nem lineáris egyenletrendszer kicsit bonyolultabb a megoldás menete. Az utolsó egyenletet vonjuk ki minden előtte lévőből. Ekkor a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned}
2(a_4-a_1)x + 2(b_4-b_1)y + 2(c_4-c_1)z = 2c^2(t_4-t_1)\xi + A_1 \\
2(a_4-a_2)x + 2(b_4-b_2)y + 2(c_4-c_2)z = 2c^2(t_4-t_2)\xi + A_2 \\
2(a_4-a_3)x + 2(b_4-b_3)y + 2(c_4-c_3)z = 2c^2(t_4-t_3)\xi + A_3 \\
(x-a_4)^2 + (y-b_4)^2 + (z-c_4)^2 = c^2(t_4-\xi)^2,
\end{aligned} \tag{3.1}$$

ahol

$$A_i = (a_4^2 + b_4^2 + c_4^2) - (a_i^2 + b_i^2 + c_i^2) - c^2(t_4^2 - t_i^2), i = 1, 2, 3.$$

Vegyük a (3.1) első három egyenletét és ξ legyen konstans. Ekkor

$$x = \frac{D_1}{D}, y = \frac{D_2}{D}, z = \frac{D_3}{D},$$

ahol

$$D = \begin{vmatrix} 2(a_4 - a_1) & 2(b_4 - b_1) & 2(c_4 - c_1) \\ 2(a_4 - a_2) & 2(b_4 - b_2) & 2(c_4 - c_2) \\ 2(a_4 - a_3) & 2(b_4 - b_3) & 2(c_4 - c_3) \end{vmatrix},$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2c^2(t_4 - t_1)\xi + A_1 & 2(b_4 - b_1) & 2(c_4 - c_1) \\ 2c^2(t_4 - t_2)\xi + A_2 & 2(b_4 - b_2) & 2(c_4 - c_2) \\ 2c^2(t_4 - t_3)\xi + A_3 & 2(b_4 - b_3) & 2(c_4 - c_3) \end{vmatrix},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2(a_4 - a_1) & 2c^2(t_4 - t_1)\xi + A_1 & 2(c_4 - c_1) \\ 2(a_4 - a_2) & 2c^2(t_4 - t_2)\xi + A_2 & 2(c_4 - c_2) \\ 2(a_4 - a_3) & 2c^2(t_4 - t_3)\xi + A_3 & 2(c_4 - c_3) \end{vmatrix},$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2(a_4 - a_1) & 2(b_4 - b_1) & 2c^2(t_4 - t_1)\xi + A_1 \\ 2(a_4 - a_2) & 2(b_4 - b_2) & 2c^2(t_4 - t_2)\xi + A_2 \\ 2(a_4 - a_3) & 2(b_4 - b_3) & 2c^2(t_4 - t_3)\xi + A_3 \end{vmatrix}.$$

Ha $D = 0$ akkor nem tudjuk megoldani az egyenletrendszert. Azonban $D = 0$ azt is jelenti, hogy a műholdak koplanárisak, vagyis egy síkban vannak. Erre is gondoltak a rendszer tervezői, és úgy határozzák meg a műholdak pályáit, hogy ez a helyzet ne állhasson elő.

A (3.1) lineáris egyenletrendszert Gauss-módszerrel is meg lehet oldani.

Az így kapott x, y és z értékét (3.1) utolsó egyenletébe helyettesítve ξ-t is ki tudjuk számolni. És így megkapjuk a helyünket a földön.

4. Polárkoordináták

Ahhoz, hogy meg tudjuk határozni a pontos helyünket a Földön, az előző szakaszban kapott koordinátákat át kell alakítanunk földrajzi koordinátákra (szélesség, hosszúság és magasság alakba). Ehhez polárkoordinátákra lesz szükségünk. A szélességet $-90° \leq \beta \leq 90°$ szöggel mérjük. A $-90°$ a déli sarkot jelöli és $90°D$ a jelölése, a $90°$ az északi sarkot jelöli és $90°E$ a jelölése. A hosszúságot $-180° \leq \beta \leq 180°$ szöggel mérjük. A negatív szögek a nyugati irányt jelölik és $-100°$ helyett a $100°NY$ jelölést használjuk, míg a pozitív szögek a keleti irányt jelölik és $100°$ helyett a $100°K$ jelölést használjuk. A magasságot h-val jelöljük és a tengerszint feletti magasságot jelöli, ahol a tengerszint a Föld sugara $R = 6366km$.

Adott $Q(x, y, z)$ esetén a távolságunk az origótól $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Tudjuk a fent leírtakból, hogy $d = R + h$, így a magasság könnyen kiszámolható, vagyis $h = d - R$. Mivel Q nem biztos, hogy a Föld felszínén van, ezért a Q pont P projekcióját kell venni. Megállapíthatjuk, hogy $P\left(\frac{R}{d}x, \frac{R}{d}y, \frac{R}{d}z\right)$, és Q-nak és P-nek ugyanaz a szélessége és hosszúsága. Ekkor

$$\begin{cases} \frac{R}{d}x = R\cos\beta\cos\phi \\ \frac{R}{d}y = R\sin\phi\cos\beta \\ \frac{R}{d}z = R\sin\beta. \end{cases}$$

Egyszerűsítve

$$\begin{cases} x = d\cos\beta\cos\phi \\ y = d\sin\phi\cos\beta \\ z = d\sin\beta. \end{cases}$$

Ezt az egyenletrendszert megoldva megkapjuk a helyzetünket (szélesség, hosszúság, magasság) alakban.

5. Példa

5.1. Egy statikus példa

A fentiek alapján a *Mathematica* programban számításokat végeztünk. Példaként a következő adatokat vettük:

```
a1 = -1.3991051099898975`*^7;
b1 = 1.6294647218367795`*^7;
c1 = 2.2257924546899707`*^6;
a2 = 2.3460767307350058`*^7;
b2 = -1.5340128192243828`*^6;
c2 = 1.4634552828545576`*^7;
a3 = -5.53392528605267`*^6;
b3 = 3.039548306419169`*^7;
c3 = -3.9539593176419213`*^6;
a4 = 1.4727487754789783`*^7;
b4 = 2.1104942751692567`*^7;
c4 = -7.558448302097233`*^6;
r1 = 23204698.51;
r2 = 21585835.37;
r3 = 31364260.01;
r4 = 24966798.73;
```

Ezen adatok alapján megoldottuk a fenti egyenletrendszert a beépített Solve paranccsal. Ez a parancs az egyenletrendszer Gauss-módszerrel oldja meg.

```
megoldas = Solve[{2 (a4 - a1) x + 2 (b4 - b1) y + 2 (c4 - c1) z == r1^2 - r4^2 - a1^2 + a4^2 - b1^2 + b4^2 - c1^2 + c4^2,
   2 (a4 - a2) x + 2 (b4 - b2) y + 2 (c4 - c2) z == r2^2 - r4^2 - a2^2 + a4^2 - b2^2 + b4^2 - c2^2 + c4^2,
   2 (a4 - a3) x + 2 (b4 - b3) y + 2 (c4 - c3) z == r3^2 - r4^2 - a3^2 + a4^2 - b3^2 + b4^2 - c3^2 + c4^2}, {x, y, z}]
{{x → 4.21472 × 10^6, y → 1.53437 × 10^6, z → 4.52243 × 10^6}}
```

Ezután az x_1, y_1 és z_1 változókhoz hozzárendeltük a kapott az értékeket.

```
x1 = x /. {megoldas[[1]][[1]]}
y1 = y /. {megoldas[[1]][[2]]}
z1 = z /. {megoldas[[1]][[3]]}
4.21472 × 10^6

1.53437 × 10^6

4.52243 × 10^6
```

Ugyanezt az egyenletrendszert megoldottuk Cramer-szabállyal is.

$$D0 = \begin{pmatrix} 2*(a4-a1) & 2*(b4-b1) & 2*(c4-c1) \\ 2*(a4-a2) & 2*(b4-b2) & 2*(c4-c2) \\ 2*(a4-a3) & 2*(b4-b3) & 2*(c4-c3) \end{pmatrix};$$

$$D1 = \begin{pmatrix} r1^2 - r4^2 - a1^2 + a4^2 - b1^2 + b4^2 - c1^2 + c4^2 & 2*(b4-b1) & 2*(c4-c1) \\ r2^2 - r4^2 - a2^2 + a4^2 - b2^2 + b4^2 - c2^2 + c4^2 & 2*(b4-b2) & 2*(c4-c2) \\ r3^2 - r4^2 - a3^2 + a4^2 - b3^2 + b4^2 - c3^2 + c4^2 & 2*(b4-b3) & 2*(c4-c3) \end{pmatrix};$$

$$D2 = \begin{pmatrix} 2*(a4-a1) & r1^2 - r4^2 - a1^2 + a4^2 - b1^2 + b4^2 - c1^2 + c4^2 & 2*(c4-c1) \\ 2*(a4-a2) & r2^2 - r4^2 - a2^2 + a4^2 - b2^2 + b4^2 - c2^2 + c4^2 & 2*(c4-c2) \\ 2*(a4-a3) & r3^2 - r4^2 - a3^2 + a4^2 - b3^2 + b4^2 - c3^2 + c4^2 & 2*(c4-c3) \end{pmatrix};$$

$$D3 = \begin{pmatrix} 2*(a4-a1) & 2*(b4-b1) & r1^2 - r4^2 - a1^2 + a4^2 - b1^2 + b4^2 - c1^2 + c4^2 \\ 2*(a4-a2) & 2*(b4-b2) & r2^2 - r4^2 - a2^2 + a4^2 - b2^2 + b4^2 - c2^2 + c4^2 \\ 2*(a4-a3) & 2*(b4-b3) & r3^2 - r4^2 - a3^2 + a4^2 - b3^2 + b4^2 - c3^2 + c4^2 \end{pmatrix};$$

```
x2 = Det[D1] / Det[D0]
y2 = Det[D2] / Det[D0]
z2 = Det[D3] / Det[D0]
```

4.21472×10^6

1.53437×10^6

4.52243×10^6

A d távolságot az origótól a kódban $at1$-el és $at2$-vel jelöltük. Ekkor a magasság a következő:

```
at1 = Sqrt[x1^2 + y1^2 + z1^2]
at2 = Sqrt[x2^2 + y2^2 + z2^2]
R = 6366000
```

6.36949×10^6

6.36949×10^6

6366000

```
h1 = at1 - R
h2 = at2 - R
```

3493.92

3493.92

Az így kapott adatokat átalakítva a szélességi és hosszúsági fok a következő:

```
beta1 = N[ArcSin[z1/at1]/Degree]
phi1 = N[ArcCos[x1/(at1 Cos[beta1 * π/180])]/Degree]
```

```
45.236

20.004
```

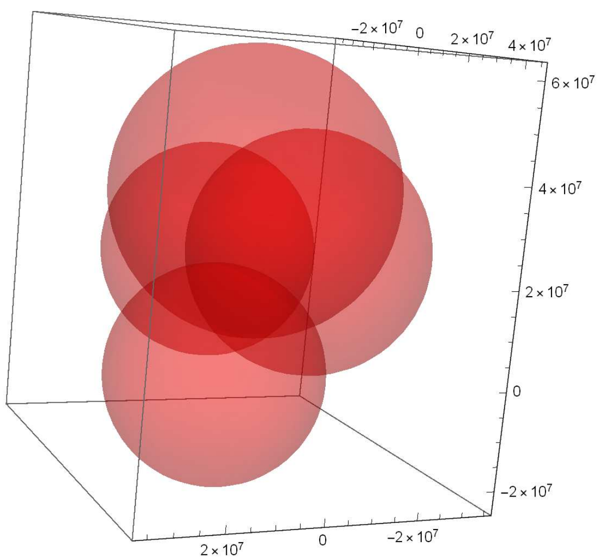
```
beta2 = N[ArcSin[z2/at2]/Degree]
phi2 = N[ArcCos[x2/(at2 Cos[beta2 * π/180])]/Degree]
```

```
45.236

20.004
```

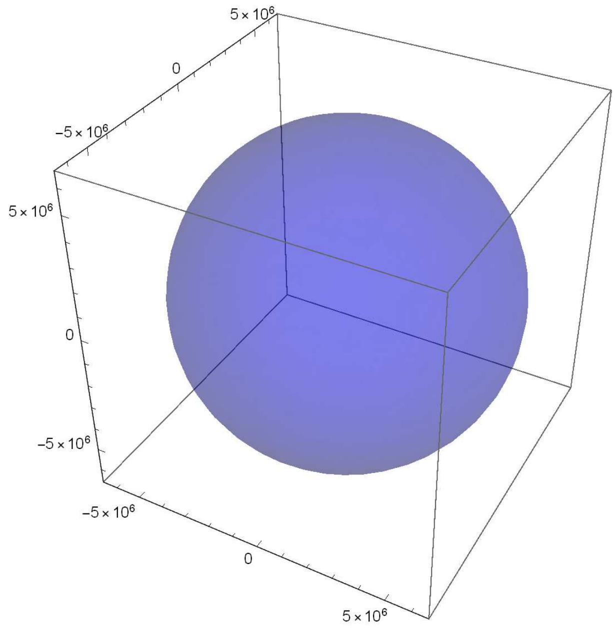
Ezeket ábrázoltuk is.

```
szatelit = Graphics3D[{Red, Opacity[0.3], Sphere[{a1, b1, c1}, r1], Sphere[{a2, b2, c2}, r2], Sphere[{a3, b3, c3}, r3],
   Sphere[{a4, b4, c4}, r4]}, Axes → True]
```



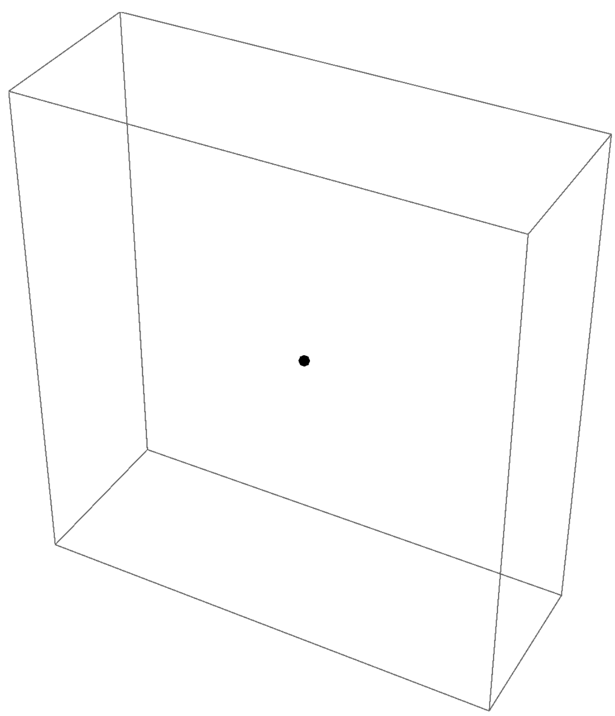
A fenti ábrán a négy műhold látható.

```
fold = Graphics3D[{Blue, Opacity[0.3], Sphere[{0, 0, 0}, R]}, Axes → True]
```



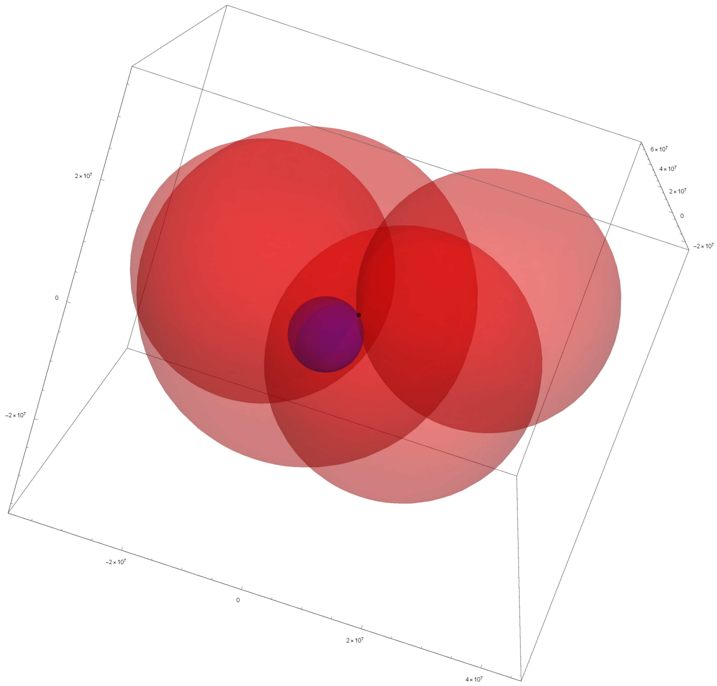
Ezen az ábrán a Föld látható.

```
pont = Graphics3D[{PointSize[Large], Point[{x1, y1, z1}]}]
```



Itt pedig a helyzetünk látható. Ha ezt a három ábrát egy grafikonra helyezzük a következőt kapjuk:

```
Show[szatelit, fold, pont]
```

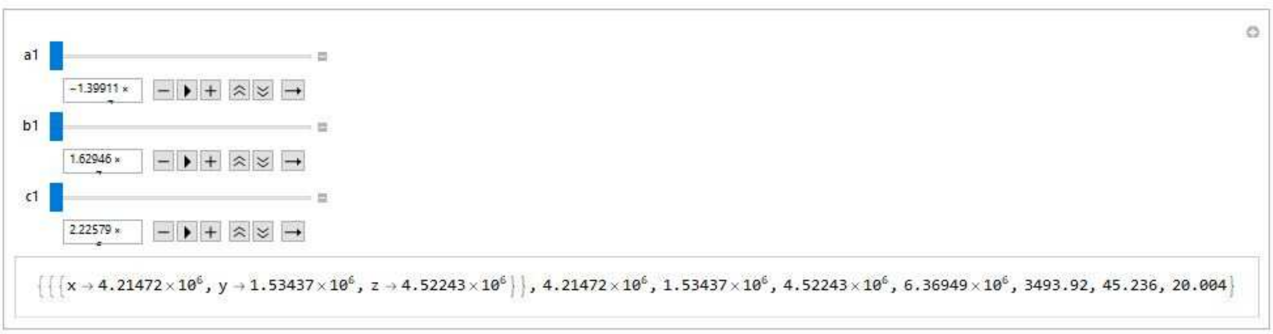


A magasságra azt kapjuk, hogy $3493.92m$ magasan vagyunk, ami a számításokban használt kerekítési hiba miatt ennyi. (Ez a hiba a fenti ábrákon is látszik.) A valós életben, természetesen a műholdak pozíciói pontosabban ismertek, a GPS vevőkben lévő órák sokkal precízebbek, valamint a számítások kiértékelése jelentősen nagyobb pontossággal történik. Ezért a számítási hibát a továbbiakban elhanyagolhatjuk, és a pontosabb helymeghatározást a mérési hiba csökkentésével érhetjük el.

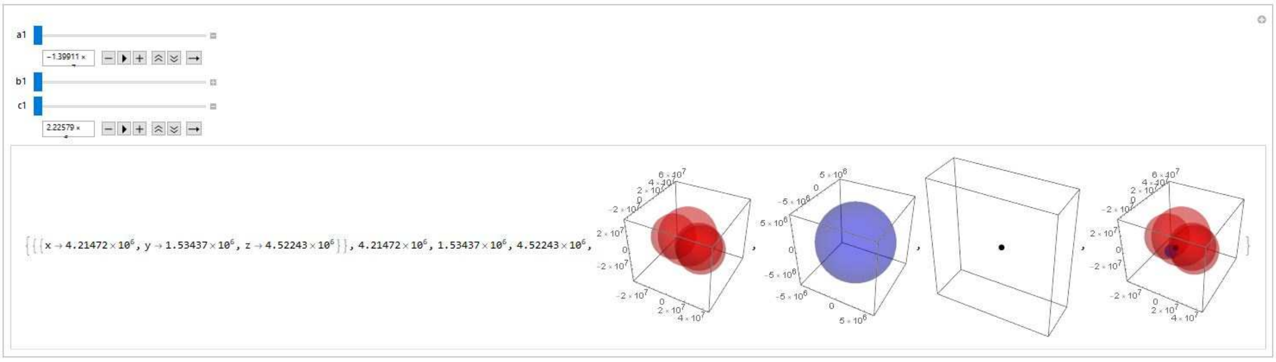
5.2. Dinamikus animáció

A fenti példát dinamikusan is ábrázoltuk a Mathematica Manipulate parancsával. A kód ide kattintva érhető el.

```
Manipulate[
 {m = Solve[{2 (a4 - a1) x + 2 (b4 - b1) y + 2 (c4 - c1) z == r1^2 - r4^2 - a1^2 + a4^2 - b1^2 + b4^2 - c1^2 + c4^2, 2 (a4 - a2) x + 2 (b4 - b2) y + 2 (c4 - c2) z == r2^2 - r4^2 - a2^2 + a4^2 - b2^2 + b4^2 - c2^2 + c4^2, 2 (a4 - a3) x + 2 (b4 - b3) y + 2 (c4 - c3) z == r3^2 - r4^2 - a3^2 + a4^2 - b3^2 + b4^2 - c3^2 + c4^2},
   {x, y, z}], x1 = x /. m[[1]][[1]], y1 = y /. m[[1]][[2]], z1 = z /. m[[1]][[3]], at1 = Sqrt[x1^2 + y1^2 + z1^2], at1 - R, beta1 = N[ArcSin[z1/at1]/Degree],
  phi1 = N[ArcCos[x1/(at1 Cos[beta1 * π/180])]/Degree]}, {a1, -1.3991051099898975`*^7, -1.3991051099898975`*^7 + 2*^7, 100}, {b1, 1.6294647218367795`*^7, 1.6294647218367795`*^7 + 2*^7, 100}, {c1, 2.2257924546899707`*^6, 2.2257924546899707`*^6 + 2*^6, 100}]
```




```
Manipulate[
 {m = Solve[{2 (a4 - a1) x + 2 (b4 - b1) y + 2 (c4 - c1) z == r1^2 - r4^2 - a1^2 + a4^2 - b1^2 + b4^2 - c1^2 + c4^2, 2 (a4 - a2) x + 2 (b4 - b2) y + 2 (c4 - c2) z == r2^2 - r4^2 - a2^2 + a4^2 - b2^2 + b4^2 - c2^2 + c4^2, 2 (a4 - a3) x + 2 (b4 - b3) y + 2 (c4 - c3) z == r3^2 - r4^2 - a3^2 + a4^2 - b3^2 + b4^2 - c3^2 + c4^2},
   {x, y, z}], x1 = x /. m[[1]][[1]], y1 = y /. m[[1]][[2]], z1 = z /. m[[1]][[3]], szatelit = Graphics3D[{Red, Opacity[0.3], Sphere[{a1, b1, c1}, r1], Sphere[{a2, b2, c2}, r2], Sphere[{a3, b3, c3}, r3], Sphere[{a4, b4, c4}, r4]}, Axes → True],
  fold = Graphics3D[{Blue, Opacity[0.3], Sphere[{0, 0, 0}, R]}, Axes → True], pont = Graphics3D[{PointSize[Large], Point[{x1, y1, z1}]}], Show[szatelit, fold, pont]}, {a1, -1.3991051099898975`*^7, -1.3991051099898975`*^7 + 2*^7, 100},
 {b1, 1.6294647218367795`*^7, 1.6294647218367795`*^7 + 2*^7, 100}, {c1, 2.2257924546899707`*^6, 2.2257924546899707`*^6 + 2*^6, 100}]
```



6. Hiba

A fentiek alapján azt gondolhatjuk, ha egy hely koordinátáit különböző időközökben határozzuk meg GPS-szel, mindig ugyanazt az értéket kapjuk. Ez így is lenne, ha a Föld gömb alakú lenne, a műholdak ideális körpályán mozognának, ugyanakkora sebességgel és a Földnek nem lenne légköre. De épp ezek azok a tényezők, amelyek kihatnak a mérésre, így előfordulhat, hogy egyazon hely koordinátái különböző időpontokban mérve különbözőek lesznek.

Ennek három okát határozhatjuk meg: a mérés hibáját (ami véletlenszerű), a műholdak kiválasztásából eredő hibát és a légköri jelenségeket. A mérési hiba sajnos elkerülhetetlen és a szabad kereskedelemben kapható GPS vevők körkörös szórása (CEP) 40 méter írja le.

Ettől pontosabb helymeghatározáshoz nagy precizitású GPS vevőt kell használni (szabad kereskedelemben nem kapható), amely a GPS műholdak jeleit mindkét frekvenciasávon képes fogadni. Ezzel kiküszöbölhető a légköri jelenségek hatása, mivel a fényhez hasonlóan a rádióhullámok is közeghatár-átlépéskor megtörnek a hullámhossz függvényében. Mivel a két rádiójel hullámhossza ismert, így a hullámtörés mértéke alapján korrigálhatóak a légköri hatások. Az ilyen módon korrigált helyzet körkörös szórása (CEP) 16 méter.

Légi- és vízi kikötőkben a nagy forgalom miatt az irányító személyzet számára még pontosabb helyzetmeghatározásra van szükség. Erre nyújt megoldást a differenciális helyzetmeghatározás, amely a műholdak mellett földi telepítésű adótornyokat is használ. Ezen adótornyok helyzete pontosan ismert. Az adótornyok a GPS műholdak alapján mérik a saját helyzetüket és az így kapott helyzet alapján kiszámított korrekciós értékeket sugározzák a többi GPS vevő felé. Ezzel a korrekcióval 9 méteres körkörös szórás (CEP) érhető el.

7. A GPS alkalmazásai

A GPS rendszer megalkotása óta egyre több helyen alkalmazzák, mivel nagy pontossággal és költséghatékonyan határozhatjuk meg vele valami helyét.

A GPS talán egyik legismertebb alkalmazása az autós navigáció. Az ilyen készülékek GPS vevővel rendelkeznek és típustól függően digitális térképeket tartalmaznak. A navigáció bekapcsolásakor a térképen megjelenik a pontos helyzetünk. Az úticélunk megadását követően a navigáció belső számítógépe segítségével megtalálja a legjobb, leggyorsabb vagy legegyszerűbb útirányt. Ahogy haladunk a helyzetünk a térképen folyamatosan frissül, így tudjuk merre kell mennünk tovább. Az ilyen navigációs rendszerek benzinkutak, boltok, parkolók és egyéb fontos helyek koordinátáit is tartalmazzák. Sőt, az egyirányú utakat is, így nem fogunk olyan utcába behajtani, ahova nem szabad. Ha elvétettünk egy lehajtót vagy kereszteződést, a rendszer újratervezi az utunkat.

A GPS-t emellett a víz, gáz és áramszolgáltatók is használják a hálózatuk tervezéséhez, üzemeltetéséhez és kiépítéséhez. A GPS segítségével a közművek olcsón, hatékonyan és pontosan tudják megalkotni a víz, gáz és áramvezetékek nyomvonalait. Ezek a szolgáltatók különféle szoftvereket használnak a GPS mellett, és így üzemzavar esetén a GPS adatok alapján a karbantartókat a meghibásodás pontos helyéhez vezénylik ki. Ez azért is nagyon fontos, mert a földbe ásott vezetékek esetén pontosan kell tudni, hogy hol kell ásni a vezetékek megleléséhez és a hiba elhárításához.

Az építőiparban is nagy hasznát vesszük a GPS-nek. Útépítések és földmunkálatok során a munkagépekben lévő GPS vevőt tartalmazó fedélzeti számítógép, a munkagépek helyzetét és egyéb fontos információkat küld a művelet irányítóinak, így összehangolhatják a munkát, illetve nyomon követhetik, hogy a munkagépek merre vannak.

Az olaj- és a gázlelőhelyek megtalálásához a talaj alatti rétegeket kell feltérképezni. Ehhez alacsony frekvenciájú akusztikus energiát (rezgéseket) bocsájtanak a Föld belseje felé mechanikus vibrációs műszerekkel vagy dinamittal. Ahogy ez a rezgéshullám áthalad a talaj különböző rétegein a jelek egy része visszaverődik. Ezeket a visszavert hullámokat érzékeli és alakítja át elektromos feszültségé a geofon, majd továbbítja egy jelrögzítőhöz. A rezgéshullám kibocsátása és a felszínre való visszaérkezése között eltelt idő mérésével nyert adatok további elemzésével megismerhetővé válik a vizsgált terület földtani felépítése, szerkezete. Világos, hogy ezek az adatok mit sem érnek a rezgéshullám kibocsátásának és a geofonoknak pontos helyzete nélkül. Ezt a módszert hívjuk szárazföldi szeizmikus mérésnek.

Hasonlóan a szárazföldi szeizmikus méréshez a vízi szeizmikus méréseknél is fontos szerepet játszik a GPS. A vízi szeizmikus mérés annyiban tér el a szárazfölditől, hogy egy hajóhoz vannak kötve az ún. hidrofonok, majd a hajóról indítják a rezgéseket és a hidrofonok gyűjtik be az információt a visszaverődött hullámokról.

A fuvarozócégek is nagy hasznát veszik a GPS-nek. Amellett, hogy a gépjárműflotta pillanatnyi helyzete nyomon követhető, a pihenőidő közeledtével a jármű biztonságos parkolóhelyre irányítható és a fuvar szervezése is könnyebb, mivel távolról követhető a ki- és berakodás.

Összegzés

A GPS-rendszer az idők folyamán sokat fejlődött, és ezzel javult a pontossága. Ennek ellenére néhány hátrány még megoldatlanul maradt. Az egyik a számítási módszer hibája, vagyis a számítás érzékenysége a kerekítésekre. A műholdak nagy távolsága sem könnyít a helyzeten, ami nagyságrendekkel kihat a számítások pontosságra. Ez az általunk bemutatott példán is látszik. A számítások során az analitikus geometria és a lineáris algebra eszközeit használtuk, a pontosabb számolásokhoz viszont differenciálegyenletekre lenne szükség, ami a rendszer dinamikáját is figyelembe tudja venni.

Hivatkozások

[1] Joseph Khoury, How is itmade? Global Positioning System(GPS), http://aix1.uottawa.ca/ jkhoury/

[2] Richard B. Langley, The Mathematics of GPS, GPS WORLD, July/August 1991

[3] Mounchili Mama, Mathematical Modelling of The Global Positioning System Tracking Signals *Master Thesis, Mathematical Modeling and Simulation*, School of Engineering, Blekinge Institute of Technology, Sweden

[4] Richard B. Thompson, Global Positioning system: The Mathematics of GPS Receivers, MATHEMATICS MAGAZINE, 260-269, 1998.