


# Gráfok dominációs száma rácsgráfokon

Tudományos diákköri dolgozat

**Szerző:**

Hajagos Orsolya
Újvidéki Egyetem
Természettudományi–matematikai Kar

**Tutor:**

dr. Ágó Krisztina
Újvidéki Egyetem
Természettudományi–matematikai Kar

Újvidék, 2026

# Tartalomjegyzék

**Előszó** **3**

**1. A gráfelmélet alapjai** **4**

**2. Rácsgráfok dominációs száma** **8**

2.1. A $\gamma(G_{1,m})$ értéke $m \geq 1$ esetén . . . . . 9

2.2. A $\gamma(G_{2,m})$ értéke $m \geq 2$ esetén . . . . . 11

2.3. A $\gamma(G_{n,m})$ értéke $24 \leq n \leq m$ esetén . . . . . 13

**Irodalomjegyzék** **29**

# Előszó

A gráfelmélet a diszkrét matematika egyik fontos területe. A gráfelméletben vizsgált problémák egyike a dominációs problémája. A dominációs problémája olyan minimális számú csúcs kiválasztását jelenti, hogy a gráf minden csúcsa vagy kiválasztva legyen vagy szomszédos legyen valamely kiválasztott csúccsal. A dominációs fogalma egyszerűen definiálható, a dominációs szám meghatározása mégis összetett feladatnak bizonyulhat.

A dominációt olyan problémáknál alkalmazzák ahol meghatározott számú objektumot kell kiválasztani, úgy, hogy az összes objektum fedve legyen, azaz hogy minden objektum vagy ki legyen választva, vagy szomszédos legyen valamelyik kiválasztott objektummal. Ilyen problémák jelentkezhetnek például a távközlési hálózatok bázisállomásainak elhelyezésekor, illetve különböző szolgáltatások helyszíneinek meghatározásakor.

A munkám témája a négyzetrácsgráfok dominációs számának meghatározása. A rácsgráf a gráfok egy speciális típusa. Szabályos szerkezetük megkönnyíti a dominációs vizsgálatát.

A dolgozatban először definiáljuk és példa segítségével szemléltetjük a gráfelmélet alapfogalmait, amelyek fontos szerepet játszanak a dominációs számok meghatározásának során bizonyos rácsgráfok esetén. Kisebb méretű rácsgráfok esetén közvetlen bizonyítással mutassuk meg a dominációs szám értékét. A nagyobb méretű rácsgráfoknál már összetettebb ez a folyamat, és további fogalmak és lemmák bevezetését igényli. Ennek érdekében bevezetjük a veszteség fogalmát, és részletesen megvizsgáljuk a rácsgráf peremét.

A dolgozat célja elsősorban irodalomkutatás, illetve már létező módszerek megismerése volt, amelyeket a későbbiekben önálló kutatási eredmények eléréséhez is felhasználhatunk.

# 1 A gráfelmélet alapjai

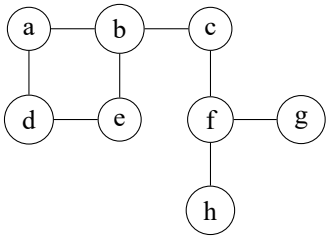
A fogalmak definíciói az [4], [5], [7] és [8] forrásokból származnak.

**1. Definíció.** A $G = (V, E)$ rendezett párt *egyszerű gráfnak* nevezzük, ha $V$ egy véges, nem üres halmaz, az $E$ pedig a $V$ halmaz kételemű részhalmazainak halmazának részhalmaza. A $V(G)$ halmaz elemeit a $G$ gráf *csúcsainak*, az $E(G)$ halmaz elemeit pedig a $G$ gráf *éleinek* nevezzük.

Az $\{u, v\}$ élet $uv$-vel is jelölhetjük.

Ha $u, v \in V(G)$, és $e = uv$ a $G$ gráf egy éle, akkor azt mondjuk, hogy az $e$ él az $u$ és $v$ csúcsokat köti össze.

**1. Példa.** Az 1. ábrán a $G = (V, E)$ gráf látható.



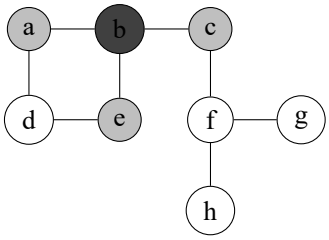

1. ábra. $G = (V, E)$ gráf.

A $G$ gráf csúcsainak halmaza: $V(G) = \{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g,\ h\}$;
A $G$ gráf éleinek halmaza: $E(G) = \{ab,\ ad,\ bc,\ be,\ cf,\ de,\ fg,\ fh\}$.

**2. Definíció.** Legyen $G = (V, E)$ egy gráf.

- A $G$ gráf $u$ és $v$ csúcsait *szomszédos csúcsoknak* nevezzük, ha az $uv$ él a $G$ gráf egy éle.
- A $v \in V(G)$ csúcs *szomszédsága* (*nyílt szomszédsága*) a $v$ csúccsal szomszédos csúcsok halmaz, és $N(v)$-vel jelöljük.
- A $v \in V(G)$ csúcs *zárt szomszédsága* a $v$ csúccsal szomszédos csúcsok, valamint magából a $v$ csúcsból álló halmaz, ezt a halmazt $N[v]$-vel jelöljük.
  Ekkor $N[v] = N(v) \cup \{v\}$.
- A $v \in V(G)$ csúcs *fokszáma* a vele szomszédos csúcsok száma, ezt $d_G(v)$-vel jelöljük.

**2. Példa.** Tekintsük a $G$ gráfot és válasszuk ki a $b$ csúcsot. A 2. ábrán sötétszürkével meg van jelölve a $b$ csúcs.



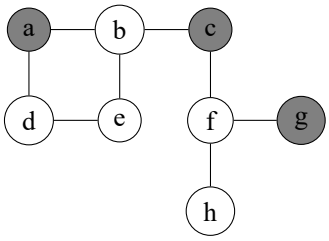

2. ábra. $G$ gráf, ahol meg van jelölve a $b$ csúcs és a vele szomszédos csúcsok.

A $b$ csúcs nyílt szomszédsága: $N(b) = \{a,\ c,\ e\}$;
A $b$ csúcs zárt szomszédsága: $N[b] = \{a,\ b,\ c,\ e\}$;
A $b$ csúcs fokszáma: $d_G(b) = 3$.

**3. Definíció.** Legyen $G = (V, E)$ egy gráf és $S \subseteq V(G)$. Az $S$ *halmaz zárt szomszédsága* azon csúcsok halmaza, melyek az $S$ halmazhoz tartoznak vagy szomszédosak az $S$ halmaz valamely csúcsával, ezt a halmazt $N[S]$-sel jelöljük. Tehát,

$$N[S] = \bigcup_{v \in S} N[v].$$

**3. Példa.** Tekintsük az 1. ábrán látható $G$ gráfot és az $S = \{a,\ c,\ g\}$ halmazt.




3. ábra. A $G = (V, E)$ gráf és az $S$ halmaz szürkével megjelölve.

Az $S$ halmaz csúcsainak zárt szomszédsága külön-külön:

$$\left.\begin{array}{l} N[a] = \{a,\ b,\ d\} \\ N[c] = \{b,\ c,\ f\} \\ N[g] = \{f,\ g\} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad N[S] = N[a] \cup N[c] \cup N[g] = \{a,\ b,\ c,\ d,\ f,\ g\}.$$

**4. Definíció.** Ha az $u$ és $v$ csúcsok szomszédosak, vagy ha $u = v$, azaz $u \in N[v]$, akkor azt mondjuk, hogy a $v$ csúcs dominálja az $u$ csúcsot.

**5. Definíció.** Egy $v_0e_1v_1e_2v_2 \ldots v_{k-1}e_kv_k$ sorozat *séta* a $G$ gráfban, ha $v_0, v_1, \ldots, v_k$ a $G$ gráf csúcsai, és $e_1, \ldots, e_k$ a $G$ gráf élei, továbbá a $v_{i-1}$ és $v_i$ csúcsokat az $e_i$ él köti össze ($1 \leq i \leq k$).

- Ha egy séta élei mind különbözőek, akkor a séta egy *vonal* a $G$ gráfban.

- Ha egy vonal esetén $v_0 = v_k$ és $k > 0$, akkor a vonal egy *zárt vonal* a $G$ gráfban.
- Ha egy vonal csúcsai mind különbözőek, akkor a vonal egy *út* a $G$ gráfban.
- Ha egy zárt vonal esetén $v_0 = v_k$-tól eltekintve nincs ismétlődés a csúcsok között, és $k \geq 30$, akkor a vonal egy *kör* a $G$ gráfban.

A $v_0e_1v_1e_2v_2 \dots v_{k-1}e_kv_k$ sétát egy egyszerű gráf esetén jelölhetjük $v_0v_1v_2 \dots v_{k-1}v_k$-val is.

**4. Példa.** Példák a sétára, vonalra, útra és körre a $G$ gráfban, amely az 1. ábrán látható.
Egy séta a $G$ gráfban: $adebcbad$
Egy vonal a $G$ gráfban: $badebcf$
Egy út a $G$ gráfban: $edabcfg$
Az egyetlen kör a $G$ gráfban: $adeba$

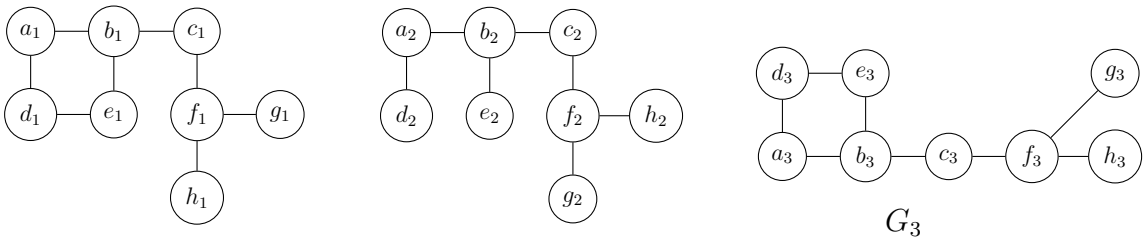
**6. Definíció.** Két gráf $G_1 = (V_1, E_1)$ és $G_2 = (V_2, E_2)$ *izomorf*, ha létezik egy $\varphi : V_1(G_1) \to V_2(G_2)$ bijektív leképezés, amely megőrzi a csúcsok szomszédosságát (ezt a bijektív leképezést *izomorfizmusnak* nevezzük), azaz

$$uv \in E_1(G_1) \Leftrightarrow \varphi(u)\varphi(v) \in E_2(G_2).$$

Jelölése: $G_1 \cong G_2$.

**5. Példa.** A $G_1$ és $G_3$ gráfok izomorfak, az izomorfizmus, amely ezt bizonyítja:

$$\varphi : \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & e_1 & f_1 & g_1 & h_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & e_3 & f_3 & h_3 & g_3 \end{pmatrix}.$$




$G_1$ $G_2$ $G_3$

4. ábra. $G_1$, $G_2$ és $G_3$ gráfok.

A $G_2$ nem izomorf sem a $G_1$-gyel, sem a $G_3$-mal. A gráfok csúcsainak fokszámaiból álló multihalmazok:

$G_1$: $\{3, 3, 2, 2, 2, 2, 1, 1\}$

$G_2$: $\{3, 3, 2, 2, 1, 1, 1, 1\}$

$G_3$: $\{3, 3, 2, 2, 2, 2, 1, 1\}$

Mivel az izomorfizmus megőrzi a szomszédosságot, megőrzi a csúcsok fokszámát is. Mivel a $G_2$ gráf csúcsai fokszámainak multihalmaza eltér a $G_1$-től és $G_3$-tól, így $G_2$ nem izomorf a többi gráffal.

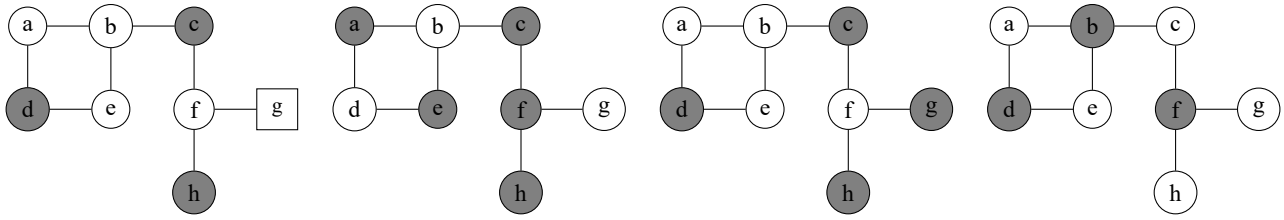
**7. Definíció.** Legyen $G = (V, E)$ egy gráf. Az $S \subseteq V(G)$ halmazt *dominál halmaznak* nevezzük, ha a gráf minden csúcsa vagy eleme az $S$ halmaznak, vagy szomszédos az $S$ valamely csúcsával.

Tehát az $S \subseteq V(G)$ halmaz akkor és csak akkor dominál halmaza a $G$ gráfnak, ha $N[S] = V(G)$.

**8. Definíció.** Legyen $G = (V, E)$ egy gráf. Az $S \subseteq V(G)$ dominál halmazt *minimálisnak* nevezzük, ha az $S$ halmaz egyetlen valós részhalmaza sem dominál halmaza a $G$ gráfnak, azaz az $S$ halmaz bármely csúcsának eltávolításával a kapott halmaz nem dominál halmaza a gráfnak.

**9. Definíció.** A $G$ gráf *dominációs száma* a $G$ gráf dominál halmazának minimális elemszáma, amelyet $\gamma(G)$-vel jelöljük.

**6. Példa.** Az 5. ábrán a $G$ gráf négy példánya látható. Az ábrákon meg vannak jelölve rendre az $S_1 = \{c,\ d,\ h\}$, $S_2 = \{a,\ c,\ e,\ f,\ h\}$, $S_3 = \{c,\ d,\ g,\ h\}$ és $S_4 = \{b,\ d,\ f\}$ halmazok csúcsai.




5. ábra. A $G$ gráf és az $S_1$, $S_2$, $S_3$, illetve $S_4$ halmazok megjelölt csúcsai.

Az $S_1 = \{c,\ d,\ h\}$ halmaz nem dominál halmaz, mivel az $S_1$ halmazból egy csúcs sem dominálja a $g$ csúcsot.

Az $S_2 = \{a,\ c,\ e,\ f,\ h\}$ halmaz dominál halmaz, de nem minimális dominál halmaz, mivel létezik $S_2' \subset S_2$, amely szintén dominál halmaza a $G$ gráfnak, mégpedig $S_2' = \{a,\ e,\ f,\ h\}$.

Az $S_3 = \{c,\ d,\ g,\ h\}$ halmaz minimális dominál halmaza a $G$ gráfnak, mivel ha bármely csúcsot eltávolítjuk az $S_3$ halmazból a kapott halmaz már nem dominálja a $G$ gráfot.

Az $S_4 = \{b,\ d,\ f\}$ halmaz a $G$ gráf minimális dominál halmaza.

A $G$ gráf dominál halmazainak elemszáma rendre $|S_2| = 5$, $|S_3| = 4$ és $|S_4| = 3$. A $G$ gráf csúcsainak száma nyolc.

A $G$ gráfban minden csúcsának legfeljebb három szomszédja van, ezért egy csúcs legfeljebb négy csúcsot dominálhat, önmagát is beleértve. Tehát egyetlen csúcs nem elegendő a $G$ gráf dominálásához.

A $G$ gráfban két olyan csúcs van, amelynek három szomszédja van, ezért ez a két csúcs együtt legfeljebb nyolc csúcsot dominálhatnak, ami megegyezik a $G$ gráf csúcsainak számával. Ha azonban kiválasztjuk ezt a két csúcsot, $b$-t és $f$-et, akkor megfigyelhetjük, hogy a $c$ csúcsot dominálja a $b$ és az $f$ csúcs is, tehát a $b$ és $f$ csúcsok együtt legfeljebb hét csúcsot dominálhatnak.

A $G$ gráfnak nem létezik olyan dominál halmaza, amely egy vagy két csúcsból áll. Ezért a $G$ gráf dominációs száma három, azaz $\gamma(G) = 3$.

# 2 Rácsgráfok dominációs száma

**10. Definíció** ([4]). A $G_{n,m}$ *rácsgráfot* olyan gráfként definiáljuk, amelynek csúcshalmaza $V(G_{n,m}) := [n] \times [m]$, ahol $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ és $[m] = \{1, 2, \ldots, m\}$. Két csúcs $(i, j)$ és $(k, l)$ szomszédosak, ha $|k - i| + |l - j| = 1$.

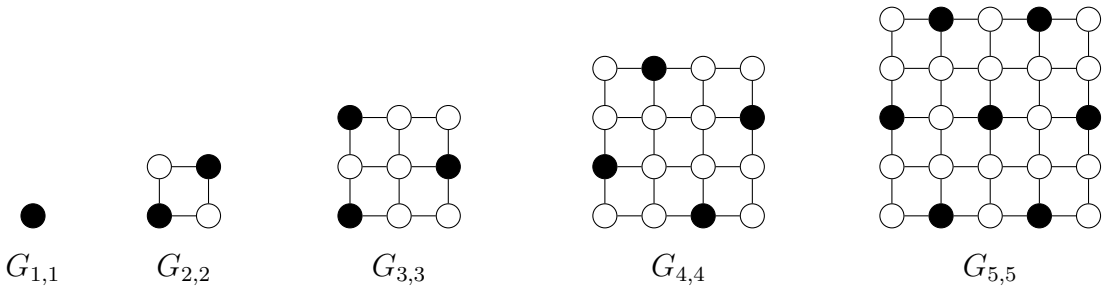
A rácsgráf csúcsait egy adott Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszer pontjaiként ábrázoljuk. Ennek megfelelően $(1, 1)$-gyel jelöljük a bal alsó csúcsot, az $(i, j)$-vel pedig az $i$-edik oszlopban és $j$-edik sorban elhelyezkedő csúcsot, $i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, m$.

Néhány eredményt ismertetünk a $G_{n,m}$ rácsgráf dominációs számára, az $n \leq m$ feltétel mellett:

$$\gamma(G_{n,m}) = \begin{cases} \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil & \text{ha } n = 1, \quad [6] \\ \left\lceil \frac{m+1}{2} \right\rceil & \text{ha } n = 2, \quad [6] \\ \left\lceil \frac{3m+1}{4} \right\rceil & \text{ha } n = 3, \quad [6] \\ m + 1 & \text{ha } n = 4 \text{ és } m = 5, 6, 9, \quad [6] \\ m & \text{ha } n = 4 \text{ és } m \neq 5, 6, 9, \quad [6] \\ \left\lceil \frac{6m+4}{5} \right\rceil - 1 & \text{ha } n = 5 \text{ és } m = 7, \quad [2] \\ \left\lceil \frac{6m+4}{5} \right\rceil & \text{ha } n = 5 \text{ és } m \neq 7, \quad [2] \\ \left\lceil \frac{10m+4}{7} \right\rceil & \text{ha } n = 6, \quad [2] \\ \left\lceil \frac{5m+1}{3} \right\rceil & \text{ha } n = 7, \quad [3] \\ \left\lceil \frac{15m+7}{8} \right\rceil & \text{ha } n = 8, \quad [3] \\ \left\lceil \frac{23m+10}{11} \right\rceil & \text{ha } n = 9, \quad [3] \\ \left\lceil \frac{30m+15}{13} \right\rceil - 1 & \text{ha } n = 10 \text{ és } m \equiv_{13} 10 \text{ vagy } m = 13, 16, \quad [3] \\ \left\lceil \frac{30m+15}{13} \right\rceil & \text{ha } n = 10 \text{ és } m \not\equiv_{13} 10 \text{ és } m \neq 13, 16, \quad [3] \\ \left\lceil \frac{38m+22}{15} \right\rceil - 1 & \text{ha } n = 11 \text{ és } m = 11, 18, 20, 22, 33, \quad [3] \\ \left\lceil \frac{38m+22}{15} \right\rceil & \text{ha } n = 11 \text{ és } m \neq 11, 18, 20, 22, 33, \quad [3] \\ \left\lceil \frac{80m+38}{29} \right\rceil & \text{ha } n = 12, \quad [3] \\ \left\lceil \frac{98m+54}{33} \right\rceil - 1 & \text{ha } n = 13 \text{ és } m \equiv_{33} 13, 16, 18, 19, \quad [3] \\ \left\lceil \frac{98m+54}{33} \right\rceil & \text{ha } n = 13 \text{ és } m \not\equiv_{33} 13, 16, 18, 19, \quad [3] \\ \left\lceil \frac{35m+20}{11} \right\rceil - 1 & \text{ha } n = 14 \text{ és } m \equiv_{22} 7, \quad [3] \\ \left\lceil \frac{35m+20}{11} \right\rceil & \text{ha } n = 14 \text{ és } m \not\equiv_{22} 7, \quad [3] \\ \left\lceil \frac{44m+28}{13} \right\rceil - 1 & \text{ha } n = 15 \text{ és } m \equiv_{26} 5, \quad [3] \\ \left\lceil \frac{44m+28}{13} \right\rceil & \text{ha } n = 15 \text{ és } m \not\equiv_{26} 5, \quad [3] \\ \left\lfloor \frac{(n+2)(m+2)}{5} \right\rfloor - 4 & \text{ha } 16 \leq n \leq 21, \quad [3] \\ \left\lfloor \frac{(n+2)(m+2)}{5} \right\rfloor - 4 & \text{ha } n = 22 \text{ vagy } n = 23, \quad [4] \\ \left\lfloor \frac{(n+2)(m+2)}{5} \right\rfloor - 4 & \text{ha } n \geq 24. \quad [1] \text{ és } [4] \end{cases}$$

**7. Példa.** A 6. ábrán a $G_{n,n}$ rácsgráfok láthatóak $n = 1, 2, 3, 4, 5$ esetén, melyeken meg vannak jelölve a képlet segítségével meghatározott elemszámú dominálo halmazaik.

$$\gamma(G_{1,1}) = \left\lceil \frac{1}{3} \right\rceil = 1,$$
$$\gamma(G_{2,2}) = \left\lceil \frac{2+1}{2} \right\rceil = 2,$$
$$\gamma(G_{3,3}) = \left\lceil \frac{3 \cdot 3 + 1}{4} \right\rceil = 3,$$
$$\gamma(G_{4,4}) = 4,$$
$$\gamma(G_{5,5}) = \left\lceil \frac{6 \cdot 5 + 4}{5} \right\rceil = 7.$$



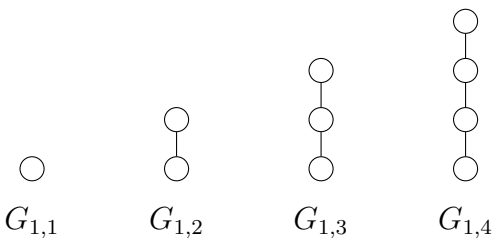

6. ábra. Rácsgráfok és feketével megjelölve a dominálo halmazaik csúcsai.

A korábbi áttekintésből látható, hogy a négyzetrácsgráfok dominációs számának meghatározása számos kutatás tárgyát képezte, és a problémával kapcsolatban kiterjedt szakirodalom áll rendelkezésre. Ebben a dolgozatban néhány eredményt fogunk részletesen bemutatni, hogy ismertessük a probléma megközelítésének különböző módjait, valamint azok eltérő összetettségét.

A 2.1 alfejezetben közvetlen bizonyítással megmutatjuk, hogy $\gamma(G_{1,m}) = \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil$, a 2.2 alfejezetben pedig azt, hogy $\gamma(G_{2,m}) = \left\lceil \frac{m+1}{2} \right\rceil$. További fogalmak és lemmák bevezetésével igazoljuk, hogy $\gamma(G_{n,m}) \geq \left\lfloor \frac{(n+2)(m+2)}{5} \right\rfloor - 4$ minden $24 \leq n \leq m$ esetén. A témához kapcsolódó valamennyi eredmény részletes bemutatása azonban meghaladná a munka terjedelmi kereteit.

## 2.1. A $\gamma(G_{1,m})$ értéke $m \geq 1$ esetén

**8. Példa.** Az 7. ábrán példák láthatóak a $G_{1,m}$ rácsgráfra $m = 1, 2, 3, 4$ esetén.




7. ábra. $G_{1,m}$ rácsgráf $m = 1, 2, 3, 4$ esetén.

A $G_{1,m}$ rácsgráf izomorf a $P_m$ úttal, ezért $\gamma(G_{1,m}) = \gamma(P_m)$.

**1. Tétel.** Minden $m \geq 1$ esetén a $G_{1,m}$ rácsgráf dominációs száma

$$\gamma(G_{1,m}) = \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil .$$

**Bizonyítás.** Tekintsük a $P_m$ utat, amelynek csúcshalmaza $V(P_m) = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ ($v_1$ az alsó csúcs, a $v_m$ pedig a felső csúcs a $P_m$ útban).

Bizonyítsuk be, hogy $\left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil$ a $\gamma(P_m)$ alsó és felső korlátja is.

Bizonyítsuk be, hogy $\gamma(P_m) \leq \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil$.

Tekintsük a $P_m$ utat. Három esetet különböztetünk meg: $m = 3k$, $m = 3k + 1$ és $m = 3k + 2$, ahol $k \in N$.

1. $m = 3k$

   Legyen $D = \{v_2, v_5, \ldots, v_{3k-1}\}$. Minden $i = 2, 5, \ldots, 3k - 1$ esetén a $v_i \in D$ csúcs dominálja a $v_{i-1}$, $v_i$ és $v_{i+1}$ csúcsokat. Tehát a $D$ halmaz dominálja a $P_{3k}$ út minden csúcsát.

   Ekkor $|D| = k = \frac{m}{3} = \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil$.

2. $m = 3k + 1$

   Legyen $D = \{v_2, v_5, \ldots, v_{3k-1}, v_{3k+1}\}$. Minden $i = 2, 5, \ldots, 3k - 1$ esetén a $v_i \in D$ csúcs dominálja a $v_{i-1}$, $v_i$ és $v_{i+1}$ csúcsokat. Megmaradt még a $v_{3k+1}$ csúcs, ami a $D$ halmaz eleme, így dominálja önmagát. Tehát a $D$ halmaz dominálja a $P_{3k+1}$ út minden csúcsát.

   Ebből következik, hogy $|D| = k + 1 = \frac{m-1}{3} + 1 = \frac{m+2}{3}$.

   Mivel $m = 3k + 1$ , ezért $\frac{m+2}{3} = \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil$, így $|D| = \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil$.

3. $m = 3k + 2$

   Legyen $D = \{v_2, v_5, \ldots, v_{3k-1}, v_{3k+2}\}$. Minden $i = 2, 5, \ldots, 3k - 1$ esetén a $v_i \in D$ csúcs dominálja a $v_{i-1}$, $v_i$ és $v_{i+1}$ csúcsokat. Megmaradt még két csúcs, $v_{3k+1}$ és $v_{3k+2}$, őket dominálja a $v_{3k+2} \in D$ csúcs. Tehát a $D$ halmaz dominálja a $P_{3k+2}$ út minden csúcsát.

   Ebből következik, hogy $|D| = k + 1 = \frac{m-2}{3} + 1 = \frac{m+1}{3}$.

   Mivel $m = 3k + 2$, ezért $\frac{m+1}{3} = \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil$, így $|D| = \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil$.

Mivel $D$ a $P_m$ út dominálló halmaza, ezért:

$$\gamma(P_m) \leq |D| = \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil . \tag{1}$$

Bizonyítsuk be, hogy $\gamma(P_m) \geq \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil$.

Legyen $D$ a $P_m$ út egy tetszőleges minimális dominálló halmaza.

A $P_m$ útban minden csúcs maximális fokszáma kettő, ezért egy csúcs legfeljebb három csúcsot dominálhat.

Mivel $D$ dominálja a $P_m$ út minden csúcsát, tehát $V(P_m) = N[D] = \bigcup_{v \in D} N[v]$, innen következik, hogy

$$m = |V(P_m)| \leq \sum_{v \in D} |N[v]| \leq 3|D|,$$

tehát $|D| \geq \frac{m}{3}$.

Mivel $|D|$ egész szám, és $|D| \geq \frac{m}{3}$, ezért $|D| \geq \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil$. Ebből következik, hogy

$$\gamma(P_m) \geq \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil . \tag{2}$$

Az (1) és a (2) egyenlőtlenségek alapján a $P_m$ út dominációs száma:

$$\gamma(P_m) = \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil .$$

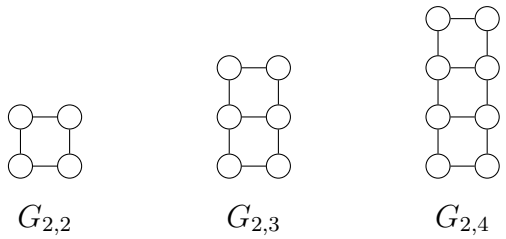
Mivel a $G_{1,m}$ rácsgráf izomorf a $P_m$ úttal, ezért:

$$\gamma(G_{1,m}) = \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil .$$

□

## 2.2. A $\gamma(G_{2,m})$ értéke $m \geq 2$ esetén

**9. Példa.** A 8. ábrán példák láthatóak a $G_{2,m}$ rácsgráfra $m = 2, 3, 4$ esetén.




8. ábra. A $G_{2,m}$ rácsgráf $m = 2, 3, 4$ esetén.

**2. Tétel.** Minden $m \geq n = 2$ esetén a $G_{2,m}$ rácsgráf dominációs száma

$$\gamma(G_{2,m}) = \left\lceil \frac{m+1}{2} \right\rceil .$$

**Bizonyítás.** A $G_{2,m}$ rácsgráf csúcshalmaza $V(G_{2,m}) = \{(i,j) : i \in \{1,2\} \wedge 1 \leq j \leq m\}$. Jelöljük $j$-edik sort az $R_j = \{(1,j),(2,j)\}$ halmazzal, ahol $j = 1, \ldots, m$.

Bizonyítsuk be, hogy $\left\lceil \frac{m+1}{2} \right\rceil$ a $\gamma(G_{2,m})$ alsó és felső korlátja is.

Bizonyítsuk be, hogy $\gamma(G_{2,m}) \leq \left\lceil \frac{m+1}{2} \right\rceil$.

Négy esetet különböztetünk meg: $m = 4k$, $m = 4k+1$, $m = 4k+2$ és $m = 4k+3$, $k \in N$.

1. $m = 4k$

   Legyen $D = \{(1,1),(2,3),(1,5),\ldots,(1,4k-3),(2,4k-1),(1,4k)\}$. Az $(1,1) \in D$ csúcs dominálja az $(1,1)$, $(2,1)$ és $(1,2)$ csúcsokat. Minden $j = 3,7,\ldots,4k-1$ esetén a $(2,j) \in D$ csúcs dominálja a $(2,j-1)$, $(1,j)$, $(2,j)$ és $(2,j+1)$ csúcsokat. Minden $j = 5,9,\ldots,4(k-1)+1$ esetén az $(1,j) \in D$ csúcs dominálja az $(1,j-1)$, $(1,j)$, $(2,j)$ és $(1,j+1)$ csúcsokat. Megmaradt még egy csúcs, az $(1,4k)$, amely a $D$ halmaz eleme, ezért dominálja önmagát. Tehát a $D$ halmaz dominálja a $G_{2,4k}$ rácsgráf minden csúcsát.

   Ebből következik, hogy $|D| = \frac{4k}{2} + 1 = \frac{m}{2} + 1 = \frac{m+2}{2}$,

   Mivel $m = 4k$, ezért $\frac{m+2}{2} = \left\lceil \frac{m+1}{2} \right\rceil$, így $|D| = \left\lceil \frac{m+1}{2} \right\rceil$.

2. $m = 4k+1$

   Legyen $D = \{(1,1),(2,3),(1,5),\ldots,(1,4k-3),(2,4k-1),(1,4k+1)\}$.
   A $D$ halmaz dominálja a $G_{2,4k+1}$ rácsgráf minden csúcsát.

   Ekkor $|D| = \frac{4k}{2} + 1 = \frac{m-1+2}{2} = \frac{m+1}{2} = \left\lceil \frac{m+1}{2} \right\rceil$.

3. $m = 4k+2$

   Legyen $D = \{(1,1),(2,3),(1,5),\ldots,(2,4k-1),(1,4k+1),(2,4k+2)\}$.
   A $D$ halmaz dominálja a $G_{2,4k+2}$ rácsgráf minden csúcsát.

   Ebből következik, hogy $|D| = \frac{4k+2}{2} + 1 = \frac{m+2}{2}$.

   Mivel $m = 4k+2$, ezért $\frac{m+2}{2} = \left\lceil \frac{m+1}{2} \right\rceil$, így $|D| = \left\lceil \frac{m+1}{2} \right\rceil$.

4. $m = 4k+3$

   Legyen $D = \{(1,1),(2,3),(1,5),\ldots,(2,4k-1),(1,4k+1),(2,4k+3)\}$.
   A $D$ halmaz dominálja a $G_{2,4k+3}$ rácsgráf minden csúcsát.

   Ekkor $|D| = \frac{4k+2}{2} + 1 = \frac{m-3+2+2}{2} = \frac{m+1}{2} = \left\lceil \frac{m+1}{2} \right\rceil$.

Mivel $D$ a $G_{2,m}$ dominálló halmaza, ezért:

$$\gamma(G_{2,m}) \leq |D| = \left\lceil \frac{m+1}{2} \right\rceil. \tag{3}$$

Bizonyítsuk be, hogy $\gamma(G_{2,m}) \geq \left\lceil \frac{m+1}{2} \right\rceil$.

Legyen $m \geq 2$ és legyen $D$ a $G_{2,m}$ rácsgráf tetszőleges dominálló halmaza.

A $G_{2,m}$ rácsgráfnak $2m$ csúcsa van, és minden csúcs legfeljebb négy csúcsot dominálhat. Tehát érvényes, hogy $2m \leq 4|D|$, amiből következik, hogy $|D| \geq \lceil \frac{m}{2} \rceil$.

- Ha $m$ páratlan, akkor $|D| \geq \frac{m+1}{2}$, ami éppen a keresett alsó korlát.
- Tegyük fel, hogy $m$ páros. Be fogjuk bizonyítani, hogy $|D| \geq \frac{m}{2} + 1$.

  Tegyük fel az ellenkezőjét, azaz hogy $|D| = \frac{m}{2}$. Ekkor $4|D| = 2m$.

  Mivel a $D$ halmaz minden csúcsa legfeljebb négy csúcsot dominálhat, és a rácsgráf minden

csúcsa dominálva van, ezért a $D$ halmaz minden csúcsa pontosan négy csúcsot dominál, továbbá a $D$ halmaz különböző csúcsainak zárt szomszédságai páronként diszjunktak.

Az $R_1 = \{(1,1),(2,1)\}$ sorból egy csúcs sem lehet eleme a $D$ halmaznak, mivel minden csúcs az $R_1$-ből legfeljebb három csúcsot dominálhat.

Ahhoz, hogy az $(1,1)$ csúcs dominálva legyen, szükséges, hogy $(1,2) \in D$. Hasonlóan, ahhoz, hogy a $(2,1)$ csúcs dominálva legyen, szükséges, hogy $(2,2) \in D$.

Az $(1,2)$ és $(2,2)$ csúcsok szomszédosak, így a zárt szomszédságuk nem diszjunkt. Ez ellentmond annak a feltételezésnek, hogy $|D| = \frac{m}{2}$. Tehát $|D| \geq \frac{m}{2} + 1$.

Mind a két esetben azt kapjuk, hogy a $G_{2,m}$ rácsgráf minden dominálló halmaza legalább $\lceil \frac{m+1}{2} \rceil$ csúcsot tartalmaz. Tehát,

$$\gamma(G_{2,m}) \geq \left\lceil \frac{m+1}{2} \right\rceil. \tag{4}$$

Az (3) és a (4) egyenlőtlenségek alapján a $G_{2,m}$ rácsgráf dominációs száma:

$$\gamma(G_{2,m}) = \left\lceil \frac{m+1}{2} \right\rceil.$$

□

## 2.3. A $\gamma(G_{n,m})$ értéke $24 \leq n \leq m$ esetén

A rácsgráf dominációs számának alsó korlátját fogjuk meghatározni a [4]-es munka alapján. A felső korlátját bizonyítását nem ismertetjük, ezt Chang bizonyította a doktori diszertációjában [1].

**3. Tétel.** Ha $24 \leq n \leq m$, akkor:

$$\gamma(G_{n,m}) \geq \left\lfloor \frac{(n+2)(m+2)}{5} \right\rfloor - 4.$$

A rácsgráf egy csúcsa legfeljebb öt csúcsot dominálhat (a négy szomszédját és önmagát). Ebből következik, hogy

$$\gamma(G_{n,m}) \geq \left\lceil \frac{nm}{5} \right\rceil.$$

A $\gamma(G_{n,m}) = \lceil \frac{nm}{5} \rceil$ egyenlőség akkor teljesül, ha létezik olyan dominálló halmaz $D$, amelynek csúcsai a $G_{n,m}$ rácsgrág minden csúcsát pontosan egyszer dominálják, és a $D$ halmaz minden csúcsának pontosan négy szomszédja van, azaz minden $d \in D$ esetén $|N[d]| = 5$. Ekkor

$$5\,|D| - nm = 0.$$

Ez azonban a sarokcsúcsok és peremcsúcsok miatt nem teljesül, mivel a sarokcsúcsoknak két, a többi peremcsúcsnak pedig három szomszédja van. Emiatt nem igaz, hogy minden csúcsnak pontosan

négy szomszédja van. A cél ezért olyan $D$ dominált halmaz meghatározása a $G_{n,m}$ rácsgráfban, amelyre az $5\,|D| - nm$ a lehető legkisebb.

**11. Definíció.** Az $S \subseteq V(G_{n,m})$ halmaz *veszteségét* a következőképpen definiáljuk:

$$\ell(S) = 5\,|S| - |N[S]|\,.$$

**1. Lemma.** A veszteségfüggvény a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

1. Minden $S$ halmaz esetén $\ell(S) \geq 0$.
2. Ha $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, akkor $\ell(S_1 \cup S_2) = \ell(S_1) + \ell(S_2) + |N[S_1] \cap N[S_2]|$.
3. Ha $S' \subseteq S$, akkor $\ell(S') \leq \ell(S)$.
4. Ha $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, akkor $\ell(S_1 \cup S_2) \geq \ell(S_1) + \ell(S_2)$.

**Bizonyítás.** A veszteségfüggvényt az $\ell(S) = 5\,|S| - |N[S]|$ képlettel definiáltuk.

1. A rácsgráf minden csúcsának zárt szomszédsága legfeljebb öt csúcsot tartalmaz. Ezért az $S$ halmaz minden csúcsa legfeljebb öt csúcsot dominálhat, így

   $$|N[S]| \leq 5\,|S|\,.$$

   Ebből következik, hogy $5\,|S| - |N[S]| \geq 0$, azaz $\ell(S) \geq 0$.

2. Legyen $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. Ebből következik, hogy $|S_1 \cup S_2| = |S_1| + |S_2|$, mivel az $S_1$ és $S_2$ halmazoknak nincs közös csúcsuk.

   A zárt szomszédságra teljesül, hogy $N[S_1 \cup S_2] = N[S_1] \cup N[S_2]$.

   Két halmaz uniójának számosságára érvényes, hogy

   $$|N[S_1] \cup N[S_2]| = |N[S_1]| + |N[S_2]| - |N[S_1] \cap N[S_2]|\,.$$

   Ezek alapján:

   $$\begin{aligned}\ell(S_1 \cup S_2) &= 5\,|S_1 \cup S_2| - |N[S_1 \cup S_2]| = 5\,|S_1| + 5\,|S_2| - |N[S_1] \cup N[S_2]| = \\ &= 5\,|S_1| + 5\,|S_2| - |N[S_1]| - |N[S_2]| + |N[S_1] \cap N[S_2]| = \\ &= \ell(S_1) + \ell(S_2) + |N[S_1] \cap N[S_2]|\end{aligned}$$

3. Legyen $S' \subseteq S$.

   Vizsgáljuk meg a két halmaz veszteségének különbségét:

   $$\ell(S) - \ell(S') = 5\,|S| - |N[S]| - 5\,|S'| + |N[S']| = 5(|S| - |S'|) - (|N[S]| - |N[S']|)$$

Az $S \setminus S'$ halmaz egy-egy csúcsa legfeljebb öt csúcsot adhat hozzá az $N[S] \setminus N[S']$ halmazhoz.

$$|N[S]| - |N[S']| \leq 5(|S| - |S'|)$$

Ebből következik, hogy $\ell(S) - \ell(S') \geq 0$, azaz, hogy $\ell(S') \leq \ell(S)$.

4. Legyen $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. A 2. tulajdonság alapján:

$$\ell(S_1 \cup S_2) = \ell(S_1) + \ell(S_2) + |N[S_1] \cap N[S_2]|\,.$$

Tudjuk, hogy $|N[S_1] \cap N[S_2]| \geq 0$. Ebből következik, hogy $\ell(S_1 \cup S_2) \geq \ell(S_1) + \ell(S_2)$.

□

Jelöljük $\ell_{n,m}$-mel a $G_{n,m}$ rácsgráf dominált halmazainak minimális veszteségét, azaz

$$\ell_{n,m} = \min_{D} \ell(D).$$

**2. Lemma.** $\gamma(G_{n,m}) = \frac{nm + \ell_{n,m}}{5}$.

**Bizonyítás.** Legyen $D \subseteq V(G_{n,m})$. A $D$ halmaz veszteségfüggvénye:

$$\ell(D) = 5\,|D| - |N[D]|\,.$$

Ha a $D$ halmaz a $G_{n,m}$ rácsgráf dominált halmaza tudjuk, hogy $N[D] = V(G_{n,m})$. Ebből következik, hogy $|N[D]| = |V(G_{n,m})| = nm$. Ebből következik, hogy a $D$ halmaz veszteségfüggvénye:

$$\ell(D) = 5\,|D| - nm.$$

A minimalitásból következik, hogy $\ell_{n,m} = 5\gamma(G_{n,m}) - nm$, amiből átrendezéssel kapjuk, hogy

$$\gamma(G_{n,m}) = \frac{\ell_{n,m} + nm}{5}.$$

□

Célunk, hogy meghatározzuk az $\ell_{n,m}$ alsó korlátját.

A veszteség a csúcsok szomszédainak száma miatt a rácsgráf peremén összpontosul. A rácsgráf minden belső csúcsának négy szomszédja van, míg a peremcsúcsoknak kettő vagy három.

A továbbiakban részletesebben megvizsgáljuk a rácsgráf tíz csúcsréteg vastagságú peremét.

**12. Definíció.** A $G_{n,m}$ rácsgráf *peremét* a következőképpen definiáljuk:

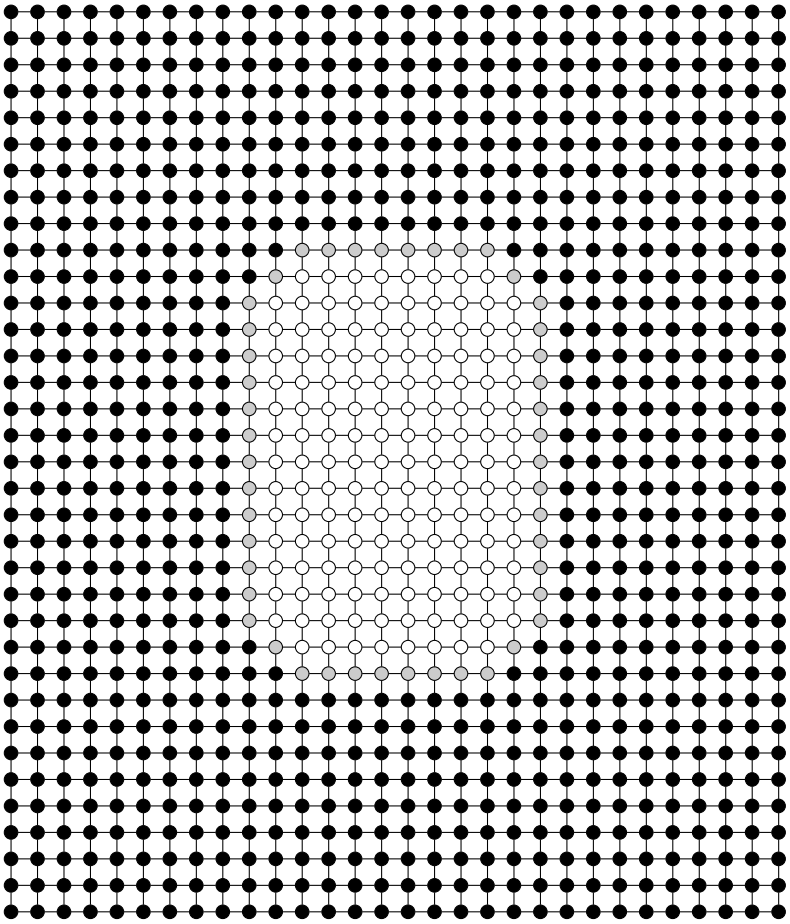
$$\begin{aligned} B_{n,m} = \{(i,j) : i \leq 10 \ \vee \ j \leq 10 \ \vee \ i > n-10 \ \vee \ j > m-10\} \cup \\ \cup \ \{(11,11),\ (11,m-10),\ (n-10,11),\ (n-10,m-10)\}. \end{aligned}$$

A $B_{n,m}$ halmaz a tíz csúcsréteg vastagságú peremen kívül további négy csúcsot tartalmaz, amelyek a rácsgráf belső részének sarokcsúcsai.

**13. Definíció.** Az $S \subseteq V(G_{n,m})$ halmaz *belső részét* a következőképpen definiáljuk:

$$I(S) = \{v \in S : N[v] \subseteq S\}.$$

**10. Példa.** A 9. ábrán a $G_{30,35}$ rácsgráf látható. A $B_{30,35}$ halmaz csúcsait fekete és szürke színnel, míg az $I(B_{30,35})$ halmaz csúcsait kizárólag fekete színnel jelöltük.



9. ábra. A $G_{30,35}$ rácsgráf.

Jelöljük $b_{n,m}$-mel azon $D \subseteq B_{n,m}$ halmazok veszteségének minimumát, amelyek dominálják az $I(B_{n,m})$ halmazt, azaz

$$n, m = D\ell(D).$$

A $G_{n,m}$ rácsgráf minden $D$ dominált halmazára a $D' = D \cap B_{n,m}$ halmaz dominálja az $I(B_{n,m})$ halmazt. Ebből következik, hogy

$$b_{n,m} \leq \ell(D') \leq \ell(D),$$

ezért:

$$b_{n,m} \leq l_{n,m}. \tag{5}$$

Tehát a $b_{n,m}$ az $\ell_{n,m}$ alsó korlátja.

A $B_{n,m}$ halmaz sok csúcsot tartalmaz, ezért felosztjuk négy részre:

$$P_{n-12},\ O_{m-12},\ R_{n-12},\ Q_{m-12}.$$

**14. Definíció.** Minden $p \geq 12$ esetén a $P_p \subset B_{n,m}$ halmaz a következőképpen definiáljuk:

$$P_p = ([10] \times \{12\}) \cup ([11] \times \{11\}) \cup ([p] \times [10]).$$

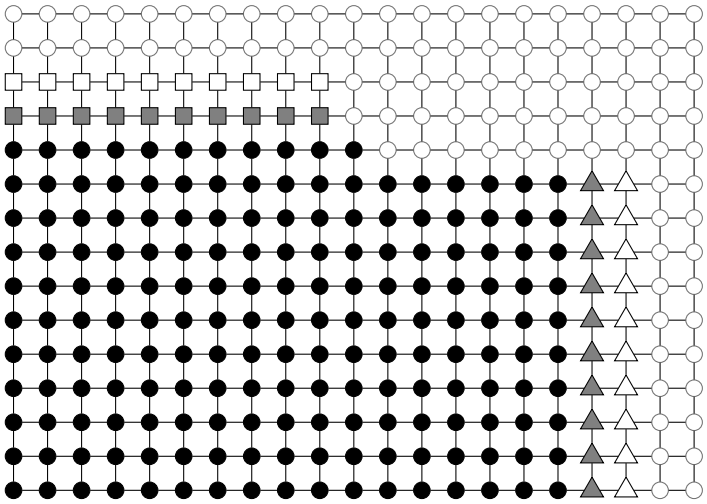
A $[10] \times \{12\}$ csúcsokat a $P_p$ halmaz *bemeneti csúcsainak*, a $\{p\} \times [10]$ csúcsokat pedig a $P_p$ halmaz *kimeneti csúcsainak* nevezzük.

A bemeneti és kimeneti csúcsok szükségesek az átmenethez az egyik részből a másikba.

**11. Példa.** A 10. ábrán a 10. példában szemléltetett $G_{30,35}$ rácsgráfhoz tartozó $P_{18}$ halmaz látható.

A $P_{18}$ halmaz csúcsait feketével és szürkével jelöltük. A $[10] \times \{12\}$ bemeneti csúcsokat szürke négyzetek, míg a $\{18\} \times [10]$ kimeneti csúcsokat szürke háromszögek jelölik.

A $Q_{23}$ halmaz kimeneti csúcsait fehér négyzetekkel, míg az $O_{23}$ halmaz bemeneti csúcsait fehér háromszögekkel jelöltük.



10. ábra. A $P_{18}$ halmaz.

Tetszőleges $n, m \in \mathbb{N}$ esetén definiáljuk az $f_{n,m} : [n] \times [m] \to [m] \times [n]$ bijektív leképezést a következőképpen:

$$f_{n,m}(i,j) = (j, n-i+1).$$

A $B_{n,m}$ halmaz négy páronként diszjunkt halmaz uniója:

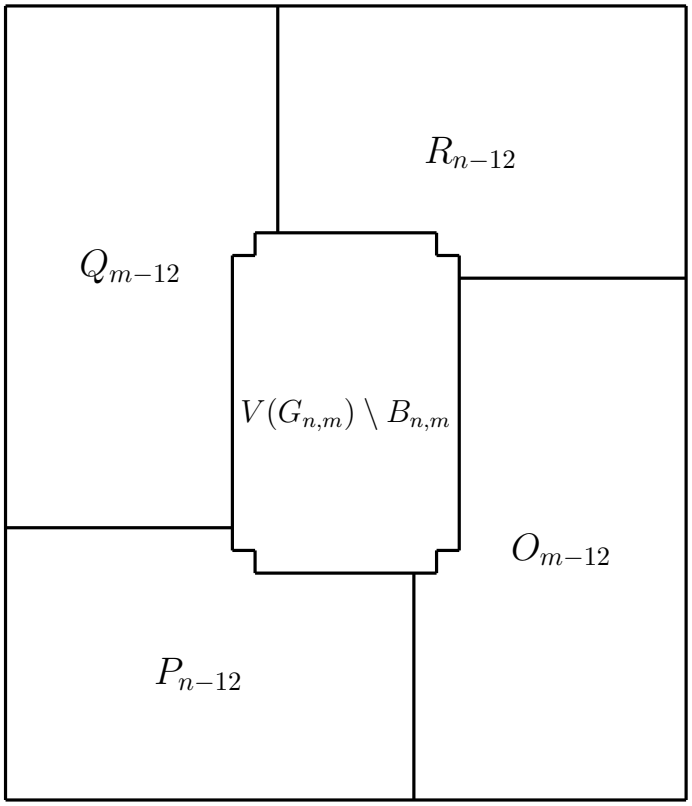
$$P_{n-12}$$

$$Q_{m-12} = f_{m,n}(P_{m-12})$$

$$R_{n-12} = f_{m,n} \circ f_{n,m}(P_{n-12})$$

$$O_{m-12} = f_{n,m}^{-1}(P_{m-12})$$

A 11. ábrán a korábban definiált $P_{n-12},\ O_{m-12},\ R_{n-12},\ Q_{m-12}$ halmazokat szemléltetjük.



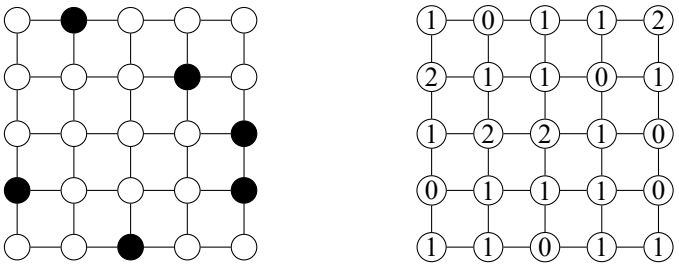

11. ábra. A $P_{n-12}, O_{m-12}, R_{n-12}, Q_{m-12}$ halmazok.

Mind a négy halmaz a $P_p$ alakú halmazokból származtatható, ezért elegendő az általános $P_p$ halmazt vizsgálni minden $p \geq 12$ egész szám esetén.

Legyen $S \subseteq V(G_{n,m})$. Definiáljuk a $\varphi_S : V(G_{n,m}) \to \{0, 1, 2\}$ függvényt a következőképpen:

$$\varphi_S(i,j) = \begin{cases} 0 & (i,j) \in S, \\ 1 & (i,j) \in N[S] \setminus S, \\ 2 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

**12. Példa.** A 12, ábrán a $G_{5,5}$ rácsgráf látható, amelyen az $S$ halmaz csúcsait feketével jelöltük. A rácsgráf mellett a csúcsokhoz a $\varphi_S$ függvény által rendelt értékek láthatók.




12. ábra. A $G_{5,5}$ rácsgráf és az értékek, amelyeket a $\varphi_S$ függvény rendel a csúcsoknak.

A $0$ mellett csak $0$ vagy $1$ állhat, mivel ha egy csúcs a $0$ értéket kapja, azaz az $S$ halmaz eleme, akkor a vele szomszédos csúcs vagy a zárt szomszédságába tartozik vagy eleme az $S$ halmaznak.

Legyen $p \geq 12$ és $S \subseteq P_p$ halmaz. Jelöljük $w^{in}(S)$-sel az $S$ halmaz *bemeneti szavát*, $w_p^{out}(S)$-sel pedig az $S$ halmaz *kimeneti szavát*, amelyek a $\{0,1,2\}$ ábécé feletti tíz hosszúságú szavak. A szavakat a bemeneti és kimeneti csúcsokról olvassuk a $\varphi_S$ függvény alkalmazása után. Az $O_p$ halmaz bemeneti szava a $w^{in}(f_{n,m}(S))$, a kimeneti szava pedig a $w_p^{out}(f_{n,m}(S))$, ahol $S \subseteq O_p$. Hasonlóan a $Q_p$ és $R_p$ halmazok esetében is.

Jelöljük $W$-vel a bemeneti és kimeneti szavak halmazát. A $W$ halmaz a $\{0,1,2\}$ ábécé feletti olyan tíz hosszúságú szavakat tartalmazza, amelyek nem tartalmazzák sem a $02$, sem a $20$ részszavak.

**3. Lemma.** A $W$ halmaz számossága $8119$.

**Bizonyítás.** Jelöljük $a_k$-val a $\{0,1,2\}$ ábécé feletti azon $k$ hosszúságú szavak számát, amelyek nem tartalmazzák sem a $02$, sem a $20$ részszót. Jelöljük $b_k$-val a $k$ hosszúságú, $1$-gyel kezdődő szavak számát, $c_k$-val pedig a $k$ hosszúságú, $0$-val kezdődő szavak számát. A $0$ és $2$ szimmetriája miatt $c_k$ egyúttal a $k$ hosszúságú, $2$-vel kezdődő szavak számát is megadja. Ebből következik, hogy

$$a_k = b_k + 2c_k. \tag{6}$$

Ha a szó $1$-gyel kezdődik, akkor a második betű az $\{0,1,2\}$ ábécé bármely eleme lehet. Tehát:

$$b_k = a_{k-1}. \tag{7}$$

Ha a szó $0$-val kezdődik, akkor a második betű csak $0$ vagy $1$ lehet. Ha a második betű $1$, akkor a lehetséges szavak száma $b_{k-1}$. Ha a második betű $0$, akkor a lehetséges szavak száma $c_{k-1}$. Tehát:

$$c_k = b_{k-1} + c_{k-1} = a_{k-2} + c_{k-1}. \tag{8}$$

A (6) egyenletből kifejezve a $2c_k$-t, majd felhasználva a (7) egyenletet, a következőt kapjuk:

$$2c_k = a_k - b_k = a_k - a_{k-1} \tag{9}$$

A (8) és (9) egyenletekből következik, hogy:

$$a_k - a_{k-1} = 2c_k = 2(a_{k-2} + c_{k-1}) = 2a_{k-2} + 2c_{k-1} = 2a_{k-2} + (a_{k-1} - a_{k-2}) = a_{k-2} + a_{k-1}.$$

Így a következő rekurziós összefüggést kapjuk:

$$a_k = 2a_{k-1} + a_{k-2}. \tag{10}$$

A rekurziós összefüggés kezdőértékei:

- $k = 1$ esetén az egy hosszúságú szavak száma $a_1 = 3$,
- $k = 2$ esetén a kettő hosszúságú szavak száma $a_2 = 7$.

Az $a_k - 2a_{k-1} - a_{k-2} = 0$ rekurziós összefüggés karakterisztikus egyenletének meghatározásához feltételezzük, hogy a megoldás $a_k = \lambda^k$ alakú. Ezt behelyettesítve a $\lambda^k - 2\lambda^{k-1} - \lambda^{k-2} = 0$ egyenletet kapjuk. Az egyenletet $\lambda^{k-2}$-vel elosztva ($\lambda \neq 0$) a következő másodfokú egyenletet kapjuk:

$$\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0.$$

A másodfokú egyenlet megoldóképletét alkalmazva a következő gyököket kapjuk:

$$\lambda_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}.$$

A (10) rekurziós összefüggés általános megoldása:

$$a_k = \alpha(1 + \sqrt{2})^k + \beta(1 - \sqrt{2})^k, \tag{11}$$

ahol $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

A kezdőértékek felhasználásával a következő egyenleteket kapjuk:

- $k = 1$ esetén
$$\alpha(1 + \sqrt{2}) + \beta(1 - \sqrt{2}) = 3. \tag{12}$$
- $k = 2$ esetén $\alpha(1 + \sqrt{2})^2 + \beta(1 - \sqrt{2})^2 = 7$, azaz:
$$\alpha(3 + 2\sqrt{2}) + \beta(3 - 2\sqrt{2}) = 7 \tag{13}$$

A (12) és (13) egyenletekből álló egyenletrendszer megoldásával megkapjuk, hogy $\alpha = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ és $\beta = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$.

A (11) általános megoldás, valamint az $\alpha$ és $\beta$ állandók alapján az $\{0, 1, 2\}$ ábécé feletti azon k

hosszúságú szavak száma, amelyek nem tartalmazzák sem a 02, sem a 20 részszavakat:

$$a_k = \frac{1+\sqrt{2}}{2}(1+\sqrt{2})^k + \frac{1-\sqrt{2}}{2}(1-\sqrt{2})^k.$$

Az előző kifejezést átalakítva megkapjuk, hogy:

$$a_k = \frac{(1+\sqrt{2})^{k+1} + (1-\sqrt{2})^{k+1}}{2}.$$

A képlet segítségével megkapjuk a $W$ halmaz számosságát:

$$|W| = \frac{(1+\sqrt{2})^{10+1} + (1-\sqrt{2})^{10+1}}{2} = \frac{(1+\sqrt{2})^{11} + (1-\sqrt{2})^{11}}{2} = \frac{16238}{2} = 8119.$$

□

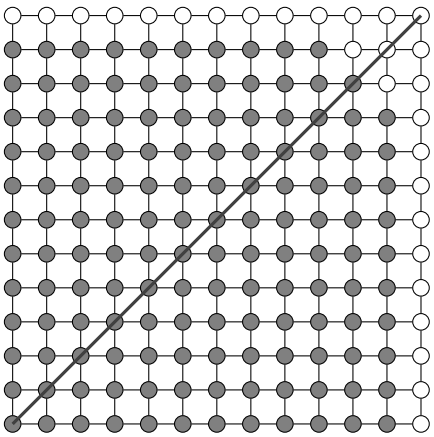
A $w$, $w'$ szavakhoz definiáljuk a $\mathcal{D}_p^{w,w'}$ halmazcsaládot, amely a $P_p$ halmaz azon $D$ részhalmazaiból áll, amelyek dominálják az $I(P_p)$ halmazt, $w$ a bemeneti szó $w^{in}(D)$, a $w'$ pedig a kimeneti szó $w_p^{out}(D)$.

A $w$ és $w'$ szavakhoz meg kell határozni a minimális veszteséget az összes $\ell(D)$, $D \in \mathcal{D}_p^{w,w'}$ veszteség közül. E célból bevezetjük a következő mátrixot:

$$C_p = \begin{pmatrix} C_p[w_1, w_1] & C_p[w_1, w_2] & \cdots & C_p[w_1, w_{8119}] \\ C_p[w_2, w_1] & C_p[w_2, w_2] & \cdots & C_p[w_2, w_{8119}] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_p[w_{8119}, w_1] & C_p[w_{8119}, w_2] & \cdots & C_p[w_{8119}, w_{8119}] \end{pmatrix}.$$

A $C_p[w, w']$ mátrixelem az összes $D \in \mathcal{D}_p^{w,w'}$ halmaz vesztesége közül a legkisebb $\ell(D)$ értéket adja meg. Ha ez a halmazcsalád üres, azaz nem létezik olyan $D$ halmaz, amely teljesíti az előírt feltételeket, akkor a mátrixelemhez a $+\infty$ értéket rendeljük.

A $P_{12}$ halmaz szimmetrikus a rácsgráf átlójára nézve, az átlót a 13. ábrán szürke vonallal jelöltük.



13. ábra. A $P_{12}$ halmaz.

Ha $D \in \mathcal{D}_{12}^{w,w'}$, akkor

$$D' = \{(j,i) \mid (i,j) \in D\}$$

halmaz a $\mathcal{D}_{12}^{w',w}$ halmazcsaládhoz tartozik. A $D$ halmaz bemeneti szava a $D'$ halmaz kimeneti szava, a $D$ halmaz kimeneti szava pedig a $D'$ halmaz bemeneti szava. A szimmetria miatt $\ell(D) = \ell(D')$, amiből következik, hogy $C_{12}[w,w'] = C_{12}[w',w]$. Tehát $C_{12}$ mátrix szimmetrikus.

A $P_{12}$ halmaz $141$ csúcsot tartalmaz. Válasszuk a részhalmazok következő sorozatát:

$$X_0 = \emptyset,\ X_1,\ \ldots,\ X_{140},\ X_{141} = P_{12},$$

úgy, hogy minden $i \in \{0,\ldots,140\}$ esetén

$$X_i \subseteq X_{i+1} \quad \text{és} \quad X_{i+1} \setminus X_i = \{x_{i+1}\}.$$

A sorozatot úgy választjuk meg, hogy minden $i \in \{0,\ldots,140\}$ esetén

$$|X_i \setminus I(X_i)| \leq 21.$$

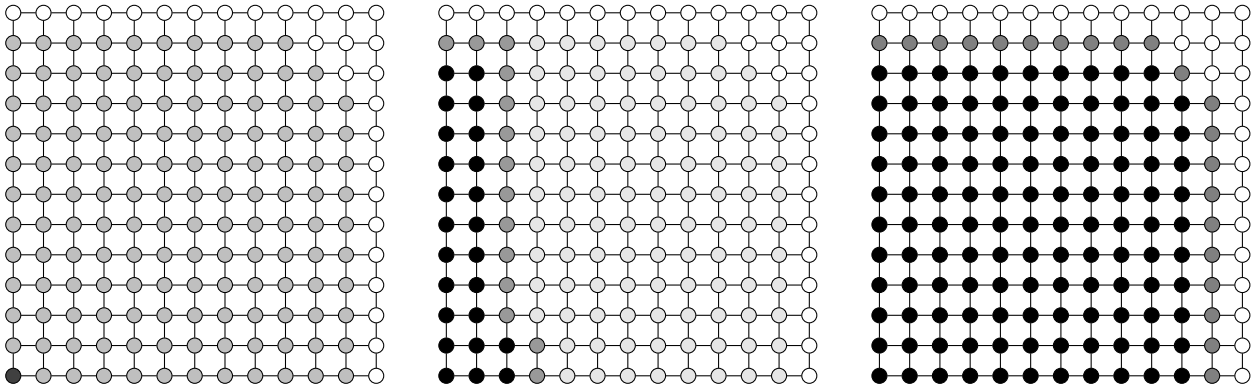
A következő elemet kiválaszthatjük az alábbi módon:

$$x_{i+1} = \min\{(x,y)\ :\ (x,y) \in P_{12} \setminus X_i\},$$

ahol a lexikografikus rendezést alkalmazzuk.

**13. Példa.**

- Az $I(X_1)$ halmaz üres. Az $X_1 \setminus I(X_1)$ csúcsait sötétszürkével jelöltük.
- Az $I(X_{38})$ csúcsait feketével, az $X_{38} \setminus I(X_{38})$ csúcsait pedig sötétszürkével jelöltük.
- Az $I(X_{141})$ csúcsait feketével, az $X_{141} \setminus I(X_{141})$ csúcsait pedig sötétszürkével jelöltük.



14. ábra. Az $X_1$, $X_{38}$ és $X_{141}$ részhalmazok.

Megállapíthatjuk, hogy $|X_1 \setminus I(X_1)| = 1$, $|X_{38} \setminus I(X_{38})| = 14$ és $|X_{141} \setminus I(X_{141})| = 21$.

Minden $i \in \{0, \ldots, 141\}$ és $f \in F_i$ esetén, ahol

$$F_i : X_i \setminus I(X_i) \to \{0, 1, 2\}$$

függvények halmaza, meg kell határozni az $\ell_{i,f}$ minimális veszteséget azon $S \subseteq X_i$ halmazok között, amelyek dominálják az $I(X_i)$ halmazt, és amelyekre minden $v \in X_i \setminus I(X_i)$ esetén teljesül, hogy $\varphi_S(v) = f(v)$.

Minden $i$ esetén az $\ell_{i,f}$-et az előző $\ell_{i-1,f}$ lépés alapján határozzuk meg. Az $\ell_{141,f}$ érték alapján határozzuk meg a $C_{12}$ mátrixot.

A továbbiakban össze szeretnénk illeszteni a $P_{n-12},\ O_{m-12},\ R_{n-12},\ Q_{m-12}$ halmazokat. Ehhez szükséges, hogy a megfelelő szavak kompatibilisnek legyenek.

**15. Definíció.** Jelöljük $w'[i]$-vel a $Q_{m-12}$ halmaz kimeneti szavának $i$-edik betűjét, $w[i]$-vel pedig a $P_{n-12}$ halmaz bemeneti szavának $i$-edik betűjét, $1 \leq i \leq 10$.

A $w$ és $w'$ szavakat *kompatibilisnek* nevezzük, ha minden $i \in [9]$ esetén $w[i] + w'[i] \leq 2$. Az $i = 10$ esetben megengedett, hogy $w[10] + w'[10] > 2$ legyen, mivel ezt a csúcsot dominálhatja olyan csúcs, amely nem eleme a $B_{n,m}$ halmaznak.

A 15. definíció a $Q_{m-12}$ halmaz kimeneti szavára és a $P_{n-12}$ halmaz bemeneti szavára vonatkozik. Hasonlóan definiáljuk a kimeneti és bemeneti szavak kompatibilitását a $P_{n-12}$ és $O_{m-12}$, az $O_{m-12}$ és $R_{n-12}$, valamint az $R_{n-12}$ és $Q_{m-12}$ halmazpárok esetén is.

**16. Definíció.** Két $w, w' \in W$ szó esetén definiáljuk a következő értéket:

$$\ell(w, w') = |\{i \in [10] \ :\ w[i] \neq 2 \wedge w'[i] = 0\}| \ +\ |\{i \in [10] \ :\ w'[i] \neq 2 \wedge w[i] = 0\}|\,.$$

**4. Lemma.** Legyen $D$ a $G_{n,m}$ rácsgráf dominító halmaza, és jelöljük $D_P = D \cap P_{n-12}$, valamint $D_Q = D \cap Q_{m-12}$. Ekkor:

$$\ell\big(D \cap (P_{n-12} \cup Q_{m-12})\big) = \ell(D_P) + \ell(D_Q) + \ell(w, w'),$$

ahol $w = w^{in}(D_P)$ és $w' = w^{out}_{m-12}\big(f^{-1}_{m,n}(D_Q)\big)$. A $w$ és $w'$ szavak kompatibilisek.

**Bizonyítás.** Az 1. lemma (2.) alapján:

$$\begin{aligned}\ell\big(D \cap (P_{n-12} \cup Q_{m-12})\big) = \ell\big((D \cap P_{n-12}) \cup (D \cap Q_{m-12})\big) = \ell(D_P \cup D_Q) = \\ = \ell(D_P) + \ell(D_Q) + |N[D_P] \cap N[D_Q]|\,.\end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy $\ell(w, w')$ számolja a csúcsokat, amelyeket dominálja a $D_P$ és a $D_Q$ halmaz is, azaz

$$\ell(w, w') = |N[D_P] \cap N[D_Q]|\,.$$

Tehát

$$\ell\big(D \cap (P_{n-12} \cup Q_{m-12})\big) = \ell(D_P) + \ell(D_Q) + \ell(w, w').$$

Még be kell bizonyítani, hogy a $w$ és $w'$ szavak kompatibilisek.

Tegyük fel az ellenkezőjét, azaz hogy $w$ és $w'$ nem kompatibilisek. Ekkor létezik olyan $i \in [9]$, amelyre:

$$w[i] + w'[i] = w^{in}(D_P)[i] + w^{out}_{m-12}\big(f^{-1}_{m,n}(D_Q)\big)[i] > 2$$

Ez azt jelenti, hogy a kettő betű közül legalább az egyiknek 2-nek kell lennie, a másik pedig nem lehet 0.

1. Tegyük fel, hogy $w^{out}_{m-12}\big(f^{-1}_{m,n}(D_Q)\big)[i] = 2$. Ez azt jelenti, hogy az $(i, 13)$ csúcsot nem dominálja egy csúcs sem a $D_Q$ halmazból.

   Mivel $D$ a $G_{n,m}$ rácsgráf dominláló halmaza, ezért a $(10, 13)$ és $(10, 12)$ csúcsok kivételével a $Q_{m-12}$ halmaz minden kimeneti csúcsát és a $P_{n-12}$ halmaz minden bemeneti csúcsát dominálnia kell a $D_P$ vagy a $D_Q$ halmaznak. Ez azt jelenti, hogy az $(i, 13) \in Q_{m-12}$ csúcsot a $P_{n-12}$ halmazhoz tartozó szomszédjának, az $(i, 12)$ csúcsnak kell dominálnia. Tehát $(i, 12) \in D$, ez pedig ellentmond annak, hogy $w^{in}(D_P)[i] \neq 0$.

2. Tegyük fel, hogy $w^{in}(D_P)[i] = 2$. Ez azt jelenti, hogy az $(i, 12)$ csúcsot nem dominálja egy csúcs sem a $D_P$ halmazból.

   Mivel $D$ a $G_{n,m}$ rácsgráf dominláló halmaza, az $(i, 12) \in P_{n-12}$ csúcsot a $Q_{m-12}$ halmazhoz tartozó szomszédjának, az $(i, 13)$ csúcsnak kell dominálnia. Tehát $(i, 13) \in D$, ez pedig ellentmond annak, hogy $w^{out}_{m-12}\big(f^{-1}_{m,n}(D_Q)\big)[i] \neq 0$.

Tehát a $w$ és $w'$ kompatibilisek.

□

A 4. lemma a $P_{n-12}$ és $Q_{m-12}$ halmazok határára szól, de lehet alkalmazni a $P_{n-12}$ és $O_{m-12}$ vagy $O_{m-12}$ és $R_{n-12}$ vagy $R_{n-12}$ és $Q_{m-12}$ halmazok határára is.

A $w, w' \in W$ szavak összes párjára definiáljuk az $L$ négyzetes mátrixot, melynek mérete $8119 \times 8119$, a következőképpen:

$$L[w, w'] = \begin{cases} +\infty, & \text{ha } w \text{ és } w' \text{ nem kompatibilisek,} \\ \ell(w, w'), & \text{ha } w \text{ és } w' \text{ kompatibilisek.} \end{cases}$$

$L$ szimmetrikus mátrix, mivel $\ell(w, w') = \ell(w', w)$.

Jelöljük $\otimes$-szal a $(min, +)$ algebrában értelmezett mátrixszorzást, azaz $C = A \otimes B$ mátrix minden $i, j$ esetén teljesül, hogy

$$C[i, j] = \min_k \big(A[i, k] + B[k, j]\big).$$

Minden $p \geq 12$ esetén definiáljuk az $M_p = L \otimes C_p$ mátrixot. Az $M_{n-12}[w, w']$ mátrixelem a lehető legkisebb $\ell(D \cap P_{n-12})$ veszteséget adja meg, azon $D \subseteq V(G_{n,m})$ dominláló halmazok között, amelyek dominálják az $I(P_{n-12})$ halmazt, ahol $w$ a $Q_{m-12}$ halmaz kimeneti szava, $w'$ pedig a $P_{n-12}$ halmaz kimeneti szava.

**5. Lemma.** Minden $24 \leq n \leq m$ esetén érvényes a következő egyenlőtlenség:

$$b_{n,m} \geq \min_{w_1,w_2,w_3,w_4 \in W} \big(M_{n-12}[w_1,w_2] + M_{m-12}[w_2,w_3] + M_{n-12}[w_3,w_4] + M_{m-12}[w_4,w_1]\big).$$

**Bizonyítás.** Tekintsünk egy olyan $D \subseteq B_{n,m}$ halmazt, amely dominálja az $I(B_{n,m})$ halmazt, amelyre teljesül, hogy $\ell(D) = b_{n,m}$. Legyenek

$$D_P = D \cap P_{n-12}, \quad D_O = D \cap O_{m-12}, \quad D_R = D \cap R_{n-12}, \quad D_Q = D \cap Q_{m-12}.$$

Jelöljük továbbá $w_P$, $w_O$, $w_R$, $w_Q$-val, illetve $w'_P$, $w'_O$, $w'_R$, $w'_Q$-val rendre a $P_{n-12}$, $O_{m-12}$, $R_{n-12}$, $Q_{m-12}$ halmazok bemeneti, illetve kimeneti szavait.

A nem szomszédos halmazok zárt szomszédságai diszjunktak, azaz

$$N[D_P] \cap N[D_R] = N[D_O] \cap N[D_Q] = \emptyset.$$

A $C_p$ mátrix definíciója alapján a $D_P$ halmaz vesztesége legalább $C_{n-12}[w_P, w'_P]$, azaz $\ell(D_P) \geq C_{n-12}[w_P, w'_P]$. Hasonlóan teljesül, hogy $\ell(D_O) \geq C_{m-12}[w_O, w'_O]$, $\ell(D_R) \geq C_{n-12}[w_R, w'_R]$ és $\ell(D_Q) \geq C_{m-12}[w_Q, w'_Q]$.

$$\begin{aligned}
b_{n,m} &= \ell(D) = \ell(D_P \cup D_O \cup D_R \cup D_Q) = \\
&= \ell(D_P) + \ell(D_O) + \ell(D_R) + \ell(D_Q) + \\
&\quad + |N[D_P] \cap N[D_Q]| + |N[D_P] \cap N[D_O]| + |N[D_O] \cap N[D_R]| + |N[D_R] \cap N[D_Q]| \\
&= \ell(D_P) + \ell(D_O) + \ell(D_R) + \ell(D_Q) + L[w_P, w'_Q] + L[w_O, w'_P] + L[w_R, w'_O] + L[w_Q, w'_R] \\
&\geq C_{n-12}[w_P, w'_P] + C_{m-12}[w_O, w'_O] + C_{n-12}[w_R, w'_R] + C_{m-12}[w_Q, w'_Q] + \\
&\quad + L[w_P, w'_Q] + L[w_O, w'_P] + L[w_R, w'_O] + L[w_Q, w'_R] \\
&\geq M_{n-12}[w'_Q, w'_P] + M_{m-12}[w'_P, w'_O] + M_{n-12}[w'_O, w'_R] + M_{m-12}[w'_R, w'_Q]
\end{aligned}$$

Ezek alapján megállapíthatjuk, hogy

$$b_{n,m} \geq \min_{w'_Q,w'_P,w'_O,w'_R \in W} \big(M_{n-12}[w'_Q, w'_P] + M_{m-12}[w'_P, w'_O] + M_{n-12}[w'_O, w'_R] + M_{m-12}[w'_R, w'_Q]\big)$$

□

Bevezetjük a $T$ mátrixot, amelynek mérete $8119 \times 8119$. A $T$ mátrix segítségével minden $p \geq 12$ esetén meghatározzuk az $M_p$ mátrixot, majd az 5. lemma alapján a $b_{n,m}$ értékét.

**6. Lemma.** Legyen a $T$ mátrix a következőképpen definiálva:

$$T[w,w'] = \begin{cases} +\infty, & \text{ha } \exists i \in [10], \text{amelyre } w[i]=0 \text{ és } w'[i]=2, \\ +\infty, & \text{ha } \exists i \in [9], \text{amelyre } w[i]=2 \text{ és } w'[i] \neq 0, \\ +\infty, & \text{ha } \exists i \in \{2,\dots,9\}, \text{amelyre} \\ & w'[i]=1,\ w[i]\neq 0,\ w'[i-1]\neq 0 \text{ és } w'[i+1]\neq 0, \\ +\infty, & \text{ha } w'[1]=1,\ w[1]\neq 0 \text{ és } w'[2]\neq 0, \\ +\infty, & \text{ha } w'[10]=1,\ w[10]\neq 0 \text{ és } w'[9]\neq 0, \\ 3\,|w'|_0 - |w|_2 - |w'|_1 + |w|_0 - 1, & \text{ha } w'[10]=0, \\ 3\,|w'|_0 - |w|_2 - |w'|_1 + |w|_0\,, & \text{egyébként,} \end{cases}$$

ahol $|a|_b$ a $b$ betű előfordulásainak számát jelöli az $a$ szóban, $b \in \{0,1,2\}$ és $a \in \{w, w'\}$. Ekkor minden $p \geq 12$ esetén $C_{p+1} = C_p \otimes T$.

A $T$ mátrix a veszteség változását írja le, amikor a $P_p$ halmazt $P_{p+1}$-re bővítjük. A $T[w,w']$ mátrixelemben a $w$ a $P_p$ halmaz kimeneti szavát, míg a $w'$ a $P_{p+1}$ halmaz kimeneti szavát jelöli. Ha a $w$ szóból a $w'$ szóba való átmenet nem lehetséges, akkor a mátrixelemhez a $+\infty$ értéket rendeljük. Ellenkező esetben a 6. lemmában megadott képletet alkalmazzuk.

A 6. lemma bizonyítása részletesen le van írva a [4]-es munkában.

Az $M_p$ mátrix definíciója alapján szintén teljesül, hogy $M_{p+1} = M_p \otimes T$.

Számítógépes számítások alapján megállapíthatjuk, hogy $M_{126} = M_{125}+1$. Az $A$ és $B$ mátrixokra, valamint a $c$ egész számra teljesül, hogy

$$\big((A+c)\otimes B\big)[i,j] = \min_k \big(\big(A[i,k]+c\big)+B[k,j]\big) = \min_k \big(A[i,k]+B[k,j]\big)+c = \big((A\otimes B)+c\big)[i,j].$$

Tehát $(A+c)\otimes B = (A\otimes B)+c$. Ebből következik, hogy

$$\begin{aligned} M_{126} &= M_{125}+1, \\ M_{127} &= M_{126}\otimes T = (M_{125}+1)\otimes T = (M_{125}\otimes T)+1 = M_{126}+1 = M_{125}+1+1 = M_{125}+2, \\ M_{128} &= M_{127}\otimes T = (M_{125}+2)\otimes T = (M_{125}\otimes T)+2 = M_{126}+2 = M_{125}+1+2 = M_{125}+3. \end{aligned}$$

Ezek alapján megállapíthatjuk, hogy minden $p \geq 125$ esetén

$$M_{125+k} = M_{125}+k,\ k \in \mathbf{N}.$$

Definiáljuk az $M'_p$ mátrixot a következőképpen:

$$M'_p = \min_{k\in\mathbf{N}} \big(M_{p+k} - k\big).$$

A $q = p + k$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy

$$M'_p = \min_q \big(M_q - (q-p)\big).$$

Ebből következik, hogy minden $q \geq p$ esetén $M'_p \leq M_q - (q-p)$, tehát $M_q \geq M'_p + (q-p)$.

Elegendő a minimumot a $k \in \{0, \ldots, 125-p\}$ értékekre vizsgálni, mivel minden $k \geq 125-p$ esetén ugyanazt az értéket kapjuk. Vizsgáljuk meg a következő eseteket:

- $k = 125 - p$, akkor $M_{p+k} - k = M_{125-p+p} - 125 + p = M_{125} - 125 + p$,
- $k = 125 - p + l$, ahol $l \in \mathbf{N}$, akkor:

$$M_{p+k} - k = M_{125-p+l+p} - 125 - l + p = M_{125+l} - 125 - l + p = M_{125} + l - 125 - l + p = M_{125} - 125 + p.$$

Az $M'_{12}$ és az $A' = M'_{12} \otimes M'_{12}$ mátrixok számítógépes kiszámításával a következő eredményt kapjuk:

$$\min_{w_1, w_2} (A' + A'^T)[w_1, w_2] = 76.$$

Ebből következik, hogy

$$\min_{w_1, w_3} \left( \min_{w_2} \big(M'_{12}[w_1, w_2] + M'_{12}[w_2, w_3]\big) + \min_{w_4} \big(M'_{12}[w_1, w_4] + M'_{12}[w_4, w_3]\big) \right) = 76,$$

azaz

$$\min_{w_1, w_2, w_3, w_4} \big(M'_{12}[w_1, w_2] + M'_{12}[w_2, w_3] + M'_{12}[w_1, w_4] + M'_{12}[w_4, w_3]\big) = 76.$$

A továbbiakban az eddig bevezetett fogalmak és bizonyított lemmák felhasználásával meghatározzuk a $G_{n,m}$ rácsgráf dominációs számának alsó korlátját minden $24 \leq n \leq m$ esetén, a 3. tétel szerint.

**Bizonyítás.** Bizonyítsuk be, hogy minden $24 \leq n \leq m$ esetén $\gamma(G_{n,m}) \geq \left\lfloor \frac{(n+2)(m+2)}{5} \right\rfloor - 4$.

A 2. lemmában megadtuk a $\gamma(G_{n,m}) = \frac{nm + \ell_{n,m}}{5}$ képletet. Az (5) összefüggés alapján tudjuk, hogy a $b_{n,m}$ az $\ell_{n,m}$ alsó korlátja.

$$\begin{aligned}
\ell_{n,m} &\geq b_{n,m} \\
&\geq \min_{w_1, w_2, w_3, w_4} \big(M_{n-12}[w_1, w_2] + M_{m-12}[w_2, w_3] + M_{n-12}[w_3, w_4] + M_{m-12}[w_4, w_1]\big) \\
&\geq \min_{w_1, w_2, w_3, w_4} \big(M'_{12}[w_1, w_2] + (n-12-12) + M'_{12}[w_2, w_3] + (m-12-12) + \\
&\quad + M'_{12}[w_3, w_4] + (n-12-12) + M'_{12}[w_4, w_1] + (m-12-12)\big) \\
&\geq 2\,(n+m-48) + \min_{w_1, w_2, w_3, w_4} \big(M'_{12}[w_1, w_2] + M'_{12}[w_2, w_3] + M'_{12}[w_3, w_4] + M'_{12}[w_4, w_1]\big) \\
&= 2\,(n+m-48) + 76 \;=\; 2\,(n+m) - 20
\end{aligned}$$

A 2. lemma és az $\ell_{n,m} \geq 2\,(n+m) - 20$ egyenlőtlenség alapján:

$$\gamma(G_{n,m}) = \frac{nm + \ell_{n,m}}{5} \geq \frac{nm + 2\,(n+m) - 20}{5} = \frac{(n+2)\,(m+2)}{5} - \frac{24}{5}.$$

Mivel $\gamma(G_{n,m})$ egész szám, ezért

$$\begin{aligned}\gamma(G_{n,m}) &\geq \left\lceil \frac{(n+2)\,(m+2)}{5} - \frac{24}{5} \right\rceil = \left\lceil \frac{(n+2)\,(m+2)}{5} - \frac{4}{5} \right\rceil - 4 \\ &\geq \left\lfloor \frac{(n+2)\,(m+2)}{5} \right\rfloor - 4.\end{aligned}$$

□

Ahogy alfejezet elején mondtuk, érvényes, hogy:

**4. Tétel** ([1])**.** Ha $8 \leq n \leq m$, akkor:

$$\gamma(G_{n,m}) \leq \left\lfloor \frac{(n+2)(m+2)}{5} \right\rfloor - 4.$$

A 3. és a 4. tétel eredményeinek egyesítésével megkapjuk az alfejezet fő tételét.

**5. Tétel.** Ha $24 \leq n \leq m$, akkor:

$$\gamma(G_{n,m}) = \left\lfloor \frac{(n+2)(m+2)}{5} \right\rfloor - 4.$$

# Irodalomjegyzék


[1] T. Y. Chang, *Domination Numbers of Grid Graphs*, Ph.D. thesis, University of South Florida, 1992

[2] T. Y. Chang, W. E. Clark, The domination numbers of the $5 \times n$ and $6 \times n$ grid graphs, *J. Graph Theory*, **17**, 81–108., 1993

[3] D. C. Fisher, The Domination Number of Complete Grid Graphs, manuscript, 1993

[4] Daniel Gonçalves, Alexandre Pinlou, Michaël Rao, Stéphan Thomassé, The domination number in grids, *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, **25**, 1443–1453., 2011

[5] Hajnal Péter, *Gráfelmélet*, Polygon, 2003

[6] M. S. Jacobson, L. F. Kinch, On the domination number of products of a graph I, *Ars Combin.*, **18**, 33–44., 1983

[7] Ana Slivkova, *Diskretna matematika 2*, Univerzitet u Novom Sadu, 2022

[8] Teresa W. Haynes, Stephen T. Hedetniemi, Peter J. Slater, *Fundamentals of domination in graphs*, Marcel Dekker, Inc., 1998