

A LAVAL-FÚVÓKA MATEMATIKAI LEÍRÁSA

Hallgató

STUPARIĆ DANIJEL

Mentorok

DR. NYERS JÓZSEF

DR. SÁNTA RÓBERT

SZABADKA, 2014

Tartalom

Tartalom	2
Jelmagyarázat	4
1. Bevezető.....	7
1.1. Az áramlástanról általánosságban	7
1.2. A Laval-fúvóka ötlete	8
1.3. A probléma leírása.....	9
2. Elméleti alapok	10
2.1. Alapvető fizikai törvényszerűségek.....	10
2.1.1. A kontinuitás törvénye	10
2.1.2. A munkaképesség megmaradásának tétele; A Bernoulli-egyenlet	10
2.1.2.1. Bernoulli egyenlete összenyomhatatlan közegekre ($\rho = \mathit{const}$).....	11
2.1.2.2. Bernoulli egyenlete összenyomható közegekre ($\rho \neq \mathit{const}$)	12
2.1.3. Az impulzusmegmaradás törvénye	13
2.2. A Laval cső.....	14
2.2.1. A hang terjedési sebessége	14
2.2.2. A Mach-szám	14
2.2.3. Változó keresztmetszetű csőtoldatok	15
2.2.4. Gázok kiömlése tartályból.....	16
2.2.5. A gáz állapotjelzői a kritikus keresztmetszetben	17
2.2.6. A Laval-nyomásviszony	19
2.2.7. A Laval-fúvóka üzeme	20
3. Fizikai modell és kialakítás.....	22
3.1. Kúpos fúvóka fizikai modellje	22
3.1.1. Kúpos fúvóka méretezése.....	23
3.2. Harangszerű fúvóka fizikai modellje.....	24
3.2.1. Harangszerű fúvóka méretezése (parabolikus approximáció).....	24
3.3. Összegzés.....	26

4. Matematikai modell	27
4.1. A modellben alkalmazott egyszerűsítések.....	27
4.2. Állapotjelzők változása a Mach-szám függvényében	28
4.2.1. Alkalmazott fundamentális törvényszerűségek.....	28
4.2.2. Hőmérséklet arány.....	28
• Elemzés	31
4.2.3. Nyomás arány.....	32
• Elemzés	34
4.2.4. Sűrűség arány	34
• Elemzés	36
4.2.5. Keresztmetszet arány.....	36
• Elemzés	39
5. Kúpos fúvóka szemléltető méretezése és szerkesztése	41
5.1. Méretezés.....	41
5.2. Szerkesztés.....	45
6. Eredmények	46
6.1. Következtetések.....	46
Összefoglaló.....	48
Irodalom	49

Jelmagyarázat

Jelzés/Rövidítés

$$v \left[\frac{m^3}{kg} \right]$$

$$R \left[\frac{J}{kg \cdot K} \right]$$

$$T [K]$$

$$G \left[\frac{m^3}{s} \right]$$

$$\rho \left[\frac{kg}{m^3} \right]$$

$$d\rho \left[\frac{kg}{m^3} \right]$$

$$\Delta p [Pa]$$

$$dp [Pa]$$

$$\xi [-]$$

$$\dot{m} \left[\frac{kg}{s} \right]$$

$$\Delta E_K [J]$$

$$\Delta E_P [J]$$

$$\Delta E_H [J]$$

$$\Delta U [J]$$

$$h [m]$$

$$w_0 \left[\frac{m}{s} \right]$$

$$\kappa [-]$$

$$\vec{l} \left[kg \cdot \frac{m}{s} \right]$$

$$m [kg]$$

Jelmagyarázat

Fajlagos térfogat

Specifikus gázállandó

Hőmérséklet

Folyadékáram

Sűrűség

Egységnyi sűrűségváltozás

Nyomáskülönbség

Egységnyi nyomásváltozás

Ellenállástényező

Tömegáram

Kinetikai energia változása

Mechanikai munkapotenciál változása

Helyzeti energia változása

Belső energia változása

Magasság

Kezdő áramlási sebesség

Adiabatikus kitevő

Impulzusvektor

Tömeg

Jelzés/Rövidítés	Jelmagyarázat
$\vec{w} \left[\frac{m}{s} \right]$	Sebességvektor
$dx [m]$	Egységnyi hossz
$c \left[\frac{m}{s} \right]$	Hangsebesség
$Ma [-]$	Mach-szám
$Ma_e [-]$	Mach-szám a kilépési keresztmetszetben
$i \left[\frac{J}{kg} \right]$	Fajlagos entalpia
$i_t \left[\frac{J}{kg} \right]$	A tartályban levő munkaközeg (levegő) fajlagos entalpiája
$i_k \left[\frac{J}{kg} \right]$	A munkaközeg (levegő) fajlagos entalpiája kritikus keresztmetszetben
$w_t \left[\frac{m}{s} \right]$	Tartályból kiáramló munkaközeg (levegő) áramlási sebessége
$w_k \left[\frac{m}{s} \right]$	A munkaközeg (levegő) áramlási sebessége a kritikus keresztmetszetben
$w_e \left[\frac{m}{s} \right]$	A munkaközeg (levegő) áramlási sebessége a kilépési keresztmetszetben
$c_p \left[\frac{J}{kg \cdot K} \right]$	Izobár fajlagos hőkapacitás
$T_t [K]$	Tartályban levő munkaközeg (levegő) hőmérséklete
$T_k [K]$	A munkaközeg (levegő) hőmérséklete a kritikus keresztmetszetben
$T_e [K]$	A munkaközeg (levegő) hőmérséklete a kilépési keresztmetszetben
$\rho_t \left[\frac{kg}{m^3} \right]$	Tartályban levő munkaközeg (levegő) sűrűsége

Jelzés/Rövidítés

$$\rho_k \left[\frac{kg}{m^3} \right]$$

$$\rho_e \left[\frac{kg}{m^3} \right]$$

$$p_t [Pa]$$

$$p_k [Pa]$$

$$p_e [Pa]$$

$$p_{tc} [Pa]$$

$$A_k [mm^2]$$

$$d_k [mm]$$

$$r_k [mm]$$

$$L_d [mm]$$

$$L_{kf} [mm]$$

$$\alpha_d [rad]$$

$$\alpha_{kf} [rad]$$

$$\theta_n [rad]$$

$$\theta_e [rad]$$

$$\varepsilon [-]$$

$$r_{ls} [mm]$$

$$\eta_{fv} [-]$$

Jelmagyarázat

Munkaközeg (levegő) sűrűsége a kritikus keresztmetszetben

Munkaközeg (levegő) sűrűsége a kilépési keresztmetszetben

Tartályban levő munkaközeg (levegő) nyomása

Munkaközeg (levegő) nyomása a kritikus keresztmetszetben

Ellennyomás (Külső nyomás)

Hangsebességnek megfelelő minimális tartálynnyomás

Kritikus keresztmetszet

Kritikus átmérő

Kritikus sugár

Diffúzor hossza

Konfúzor hossza

Diffúzor félkúpszöge

Konfúzor félkúpszöge

Parabola kezdeti érintőjének szöge

Parabola kilépési érintőjének szöge

Expanziós felületi arány

Kritikus keresztmetszet lekerekítési sugara

Laval-fúvóka hatásfoka

1. Bevezető

1.1. Az áramlástanról általánosságban

Az áramlástan a folyadéknak vagy gáznak csövekben, csatornában vagy különféle testek körül szabad térben kialakuló áramlásával foglalkozó tudomány. A fizika tudományának egyik kiterjedt területe.

Az áramlástanban a mozgó közeg termodinamikai állapotjelzői, a nyomás, a sűrűség, a hőmérséklet, az entalpia, az entrópia, illetve a belső energiának az áramlásra gyakorolt hatását és az áramlásba helyezett test és az azt körüláramló közeg kölcsönhatását vizsgáljuk.

A műszaki alkalmazások meglehetősen széleskörűek, a repülésben, a hajózásban, az erőműveknél, a hidak, csatornák tervezésénél, és nem utolsósorban az épületek energetikájában is nélkülözhetetlenek számítanak.

Az összenyomhatatlan áramlásokkal általában a hidrodinamika, míg az összenyomhatókkal az aerodinamika, illetve a gázdinamika foglalkozik. Utóbbi témakörébe tartozik a szakdolgozatom témája is.

Ha a gáz áramlási sebessége a hangsebességet megközelíti vagy esetleg meghaladja, akkor a gáz áramlása már jelentősen eltér az összenyomhatatlan folyadék áramlásától. Az egyértelműség kedvéért kihangsúlyozhatjuk, hogy a hangsebesség alatti áramlásokkal az aerodinamika, az azt megközelítővel vagy meghaladókkal pedig a gázdinamika foglalkozik.

Ez utóbbi esetben a nagy sebességű áramlással járó nyomás- és sűrűségváltozások mellett a termodinamika megfelelő összefüggéseit is figyelembe kell venni. A gázdinamikai problémák nagy részénél a gáz súlya, súrlódása és hővezetése elhanyagolható, vagyis a gáz az ideális gáztörvényeknek megfelelő súrlódásmentes közegnek tekinthető.

1.2. A Laval-fúvóka ötlete

A fúvókák tulajdonságainak a vizsgálatánál egyértelműen gázdinamikai irányvonalon kell tehát gondolkodnunk, hiszen ezek alapvető feladata a közeg áramlási irányának vagy állapotjelzőinek a szabályzása, mint pl. a közeg áramlási sebessége.

A fúvóka szerkezetileg egy cső, változó nagyságú keresztmetszettel. Úgy is mondhatjuk, hogy egy speciális formájú cső, melyen keresztül gáz áramlik. Alapvető feladata a mechanikai munkapotenciál kinetikai energiává alakítása. Ez így elég egyszerűnek tűnik, a működését leíró matematika viszont igen összetett, melyet a továbbiakban ismertetni is fogok, a megértéshez szükséges elméleti alapokkal együtt.

A szakdolgozat témáját reprezentáló Laval-fúvókát Gustaf de Laval, francia származású svéd mérnök találta fel a XIX. században, és gőzturbináknál alkalmazta először.

Kialakítását tekintve egy olyan csőszakasz, melynek a keresztmetszete fokozatosan csökken, majd elérve egy bizonyos legszűkebb keresztmetszetet, növekedni kezd. Arra használatos, hogy bármilyen összenyomható gáz áramlási sebességét hangsebesség fölé gyorsítsuk. Igen fontos részét képezi a modern rakétamotoroknak.

Ahogy már írtam, feltalálója elsődlegesen gőzturbinánál alkalmazta, ahol a vízgőz entalpiáját teljes egészében mozgási energiává alakította, viszont az innen eredő sebességnövekmény meghaladta a hangsebességet, ezért volt indokolt egy szűkülő-bővülő keresztmetszetű csőszakasz beépítése.

Ami az évszámokat illeti, Gustaf de Laval 1882-ben mutatta be gőzturbináját, fúvókáját pedig 1890-ben alakította ki, a gőzsugár szuperszonikus sebességre való gyorsításához, így hasznosíthatta az áramló gőz kinetikai energiáját a mechanikai munkapotenciál helyett.

Manapság már természetesen egyéb műszaki területeken is elterjedt, illetve nélkülözhetetlenné vált a Laval-fúvóka alkalmazása. Ezek közé tartoznak elsősorban a rakétamotorok, ahol a hatásfok lényegesen függ attól, hogy a kiáramló égéstermékeket mekkora sebességre képesek felgyorsítani. A fúvóka ezért a rakéták legfontosabb alkatrészei közé tartozik. A későbbiekben a Laval-fúvóka vizsgálatát ennek fényében fogom bemutatni.

1.3. A probléma leírása

A szakdolgozatom végkimenetele a Laval-fúvókában áramló közeg változó állapotjelzőinek a kivizsgálása, valamint egy konkrét egyszerű kúpos fúvóka méretezése, ahol a szemléletességre és az érthetőségre helyeztem a hangsúlyt.

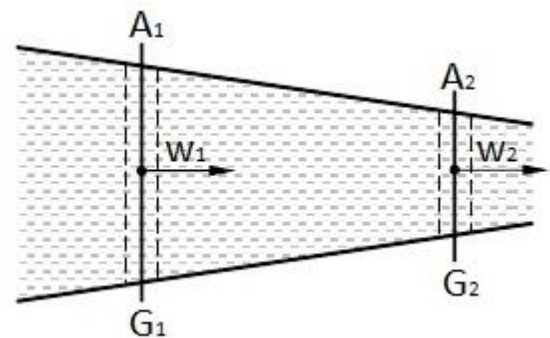
Ezekhez a feladatokhoz a szakirodalomban található általános törvényszerűségekből, és a levezetett összefüggésekből indultam ki, amit a matematikai modellnél valamelyest általánosítottam és kibővítettem. A diagramok elkészítéséhez a Matlab programcsomagot használtam, a rajzok elkészítéséhez pedig a Solid Edge rajzprogramot. Ezek a diagramok természetesen az említett függvényeken alapszanak.

2. Elméleti alapok

2.1. Alapvető fizikai törvényszerűségek

2.1.1. A kontinuitás törvénye

Ez az egyenlet az anyagmegmaradás törvénye alapján lett levezetve. Az anyag nem alakulhat ki a semmiből és nem lehet semmivé, csak az alakját és helyét változtathatja. Állandósult (stacionárius) áramlás esetén minden keresztmetszeten keresztül egyenlő tömegű folyadéknak vagy gáznak kell átáramlania ugyanabban az időpillanatban.



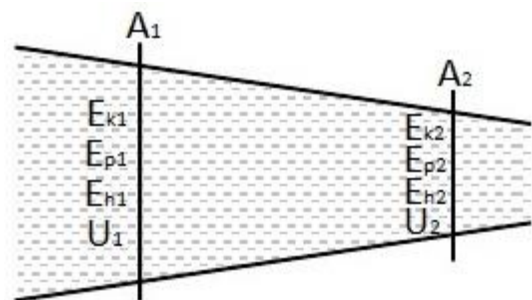
1. ábra – Az anyag nem vész el, csak átalakul

$$G_1 = G_2$$

$$\dot{m} = \rho_1 \cdot A_1 \cdot w_1 = \rho_2 \cdot A_2 \cdot w_2 \left[\frac{kg}{s} \right]$$

2.1.2. A munkaképesség megmaradásának tétele; A Bernoulli-egyenlet

A Bernoulli-egyenlet az energia megmaradás elve alapján van levezetve. Gyakorlatilag a Navier-Stokes egyenleteken belüli energiaegyenlet speciális (egyszerűsített) alakja. Leírja a vizsgált keresztmetszeten átáramló fluid energiaváltozását. A folyadékok és a gázok áramlási energiája a mozgási, a nyomás és a helyzeti energiából tevődik össze. Valós folyadékoknál azonban figyelembe kell venni



2. ábra – Az energia sem vész el, csak átalakul

a belső energia változását is, ami a folyadék viszkozitásának következménye. A súrlódási erő számára a mechanikai munkapotenciál (nyomásenergia) szolgál forrásként, melynek következtében ennek szintje folytonosan csökken, és belső energiává alakul át.

$$\Delta E_K + \Delta E_P + \Delta E_H + \Delta U = 0$$

Ahol sorban E_K a mozgási, E_P a nyomás, E_H a helyzeti és U a belső energia.

2.1.2.1. *Bernoulli egyenlete összenyomhatatlan közegekre ($\rho = const$)*

A műszaki gyakorlatban leggyakrabban előforduló esetekben a Bernoulli-egyenlet már fentebb is vázolt, jól ismert alakja használatos. Használati feltétele, hogy az áramlás stacionárius legyen, az erőtér a Föld nehézségi erőtere, a sűrűség pedig állandó legyen. Konkrétabb formájában ez a következő:

$$\frac{w^2}{2} + \frac{p}{\rho} + g \cdot h + U = const$$

Ahol h a cső magassága (általában elhanyagolható).

Ugyanez az egyenlet az entalpián keresztül is felírható, az egyszerűsítés érdekében pedig a helyzeti energiát elhanyagoljuk (rövid csőszakasz esetén):

$$i + \frac{w^2}{2} = const$$

Ahol i a nyugalomban levő közeg össz. energiatartalma, azaz entalpiája. Lassan áramló közegeknél a kinetikai energia általában elhanyagolható értékű.

2.1.2.2. Bernoulli egyenlete összenyomható közegekre ($\rho \neq \text{const}$)

Bernoulli a kísérleteit és megfigyeléseit folyadékokon végezte, így a fenti egyenlet csak inkompresszibilis közegekre érvényes, illetve kompresszibilis közegekre is, megközelítőleg 0,3 Mach számig. Azonban ennél nagyobb sebességek esetére is felírható, és alkalmazhatóvá tehető kompresszibilis közegek hangsebességű áramlása esetén is. Sűrűdésmentes és hőszigetelt közeg stacionárius áramlása esetén, a gravitációs térerősség hatásának elhanyagolásával felírható a következő alakban:

$$\int_{w_1}^{w_2} w \cdot dw + \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho(p)} = 0$$
$$\frac{w_2^2 - w_1^2}{2} = - \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{\rho(p)}$$

Mivel esetünkben összenyomható közegről – gázzal beszélünk, a továbbiakban ezt alkalmazom. Mint látható az összefüggésből, a sűrűség függ a gáz nyomásától.

Miután a közeget sűrűdésmentesnek és hőszigeteltnek tekintjük, a benne lejátszódó folyamatok izentropikusak. Izentropikus állapotváltozás esetén a sűrűség és nyomás kapcsolatára fennáll:

$$\frac{p}{\rho^\kappa} = \text{const} = \frac{p_1}{\rho_1^\kappa}$$

Innen kifejezve ρ -t és behelyettesítve Bernoulli egyenletébe, és az ideális gáztörvényt felhasználva, rendezés után a következő eredményre juthatunk:

$$w = \sqrt{w_0^2 + \frac{2 \cdot \kappa}{\kappa - 1} \cdot R \cdot T_t \cdot \left(1 - \left(\frac{p_e}{p_t}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right)} \left[\frac{m}{s}\right]$$

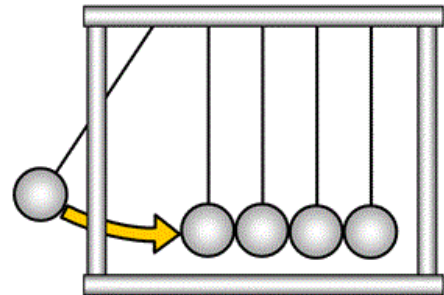
Ahol a „t“ index a tartályra utal, a p_e pedig az ún. ellennyomás, a tartályból kiáramló gázsugárban levő nyomás. Ha a gáz tartályból áramlik ki izentropikusan, akkor $w_0 = 0$.

2.1.3. Az impulzusmegmaradás törvénye

Az impulzusmegmaradás törvénye, akárcsak az előző két törvényszerűség, a fizika fundamentális (alap) törvényei közé tartozik, és szükséges a továbbiakban tárgyaltak megértéséhez.

Az alapvető definíció szerint az *impulzus* (*mozgásmennyiség*) egy adott test tömegének és a sebességének a szorzata.

Egy adott szakaszon a test impulzusa állandó marad, ha semmilyen külső hatás nem hat rá, tehát nem keletkezik a semmiből és nem veszhet el, akárcsak az anyag és az energia.



3. ábra – A mozgásmennyiség sem vesz el, szintén csak átalakul

$$\vec{I} = m \cdot \vec{w} \left[kg \cdot \frac{m}{s} \right]$$

Az impulzus vektormennyiség, így van iránya, irányítása és mértékegysége is, vagyis a tér minden irányában változhat az értéke.

Így, főként gázok esetén, igen problémás a teljes egyenletrendszer felírása, hiszen a gázmolekulák egymással ütköznek is. Ennek megfelelően mi csak az igen leegyszerűsített összefüggéssel foglalkozunk, minek értelmében a változások csak egy irányban történnek.

További egyszerűsítés a stacionárius áramlás feltételezése, valamint hogy a ható erők a nyomásból erednek. Az általános esetet Euler egyenletei definiálják. Fontos egyúttal kiemelni, hogy a valóságos áramlásoknál az összefüggések nagyságrendekkel összetettebbek:

$$-\frac{dp}{dx} = \rho \cdot w \cdot \frac{dw}{dx}$$

Ahol dx a paraméterek hosszfüggését jelöli.

2.2. A Laval cső

2.2.1. A hang terjedési sebessége

A hangsebesség c (*celeritas*, lat.) változik attól függően, hogy milyen közegről beszélünk. A levezetések mellőzése nélkül, a nyomáshullám terjedési sebessége, azaz a hangsebesség:

$$c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \sqrt{\kappa \cdot R \cdot T} \left[\frac{m}{s} \right]$$

A fenti összefüggések teljesen általánosan írják le az elemi hullám terjedési sebességét egy álló, összenyomható, és ideális közegben. Látható, hogy a hullám terjedési sebessége egy adott gázban csak a hőmérséklet függvénye. Ennek oka, hogy a hang eleminek tekinthető nyomáshullámok sorozata, ezeket pedig a rendezetlen (hő)mozgást végző molekulák továbbítják.

2.2.2. A Mach-szám

A Mach-szám tulajdonképpen egy arányszám, így dimenziómentes mennyiség. Matematikailag az áramlási sebesség és az áramló közeg helyi hangsebességének hányadosa:

$$Ma = \frac{w}{c} [-]$$

A Mach-szám segítségével számolnak nagy sebességű közegek áramlásainak leírásánál, mint amilyenek a fúvókákban, diffúzorokban vagy szélcsatornáknak történnek.

Amint az áramlás egy csatornában meghaladja $Ma = 1$ -et, *szuperszonikussá* válik. Ahhoz, hogy ez létrejöjjön, szűkülő-bővülő csatornára van szükség (*konfúzor-diffúzor*). A csatorna szűkülő része felgyorsítja az áramlást $Ma = 1$ -re, a bővülő csatorna rész pedig a hangsebesség fölé gyorsítja. Az így kialakított csőszakaszt nevezzük *Laval-fúvókának*, melyet a továbbiakban ismertetek.

2.2.3. Változó keresztmetszetű csőtoldatok

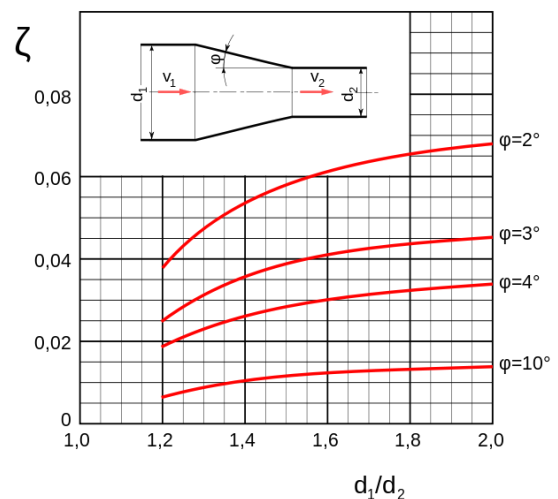
Az áramlás irányában bővülő csőtoldatokat nevezzük *diffúzoroknak* (szemben a *konfúzorokkal*, amelyek keresztmetszete az áramlás irányában csökken). A diffúzorokban az áramlás irányában csökken a sebesség, a nyomás pedig nő.

A konfúzoroknál ez fordított, vagyis az áramlás irányában nő a sebesség és csökken a nyomás. Ki kell emelni, hogy hangsebesség felett ($Ma > 1$) ennek fordítottja lesz érvényes, tehát a nyomás fog nőni, és a sebesség fog csökkenni, akárcsak a diffúzoroknál. Ez az oka annak, hogy egy adott közeg hangsebesség fölé gyorsítását nem lehet kivitelezni kizárólag szűkülő csőtoldattal.

A jó kialakítású csőtoldatokban a nyomásvesztés jóval kisebb, mint hirtelen keresztmetszetváltozások esetén. A nyomásvesztés a geometriai kialakítástól és a csőfal érdességétől függ. A következő összefüggéssel számítható:

$$\Delta p = \xi \cdot \frac{w^2}{2} \cdot \rho \text{ [Pa]}$$

A ξ veszteségtényező értéke a kúpszögtől is függ, tehát a bővülés hirtelenségétől, rohamosságától, ez látható a 4. ábrán. Összenyomható közegnél az áramlási sebesség



4. ábra - A veszteségtényező változásának példája szűkülő csőtoldat esetére

átlagával és a közeg átlagsűrűségével számolhatunk, azaz a gáz állapotjelzőinek a legkisebb és a legnagyobb keresztmetszetek közötti átlagértékeivel.

2.2.4. Gázok kiömlése tartályból

A 2.1.2.2 részben tárgyalt kifejezés stacionárius, izentrópikus áramlás esetén kapcsolatot teremt a tartályból történő kiáramlás w sebessége, a tartályban levő tartály T_t hőmérséklete és p_t nyomása, valamint a kiáramlás helyén a gázsugárban levő p_e ellennyomás között:

$$w = \sqrt{\frac{2 \cdot \kappa}{\kappa - 1} \cdot R \cdot T_t \cdot \left(1 - \left(\frac{p_e}{p_t}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right)}$$

A maximális kiáramlási sebesség $p_e = 0$ ellennyomáshoz tartozik:

$$w = \sqrt{\frac{2 \cdot \kappa}{\kappa - 1} \cdot R \cdot T_t}$$

A kontinuitás és az impulzusmegmaradás törvényének összevonásával megállapítható, milyen csökresztmetszet felel meg a hangsebesség elérésének, illetve a további gyorsításnak. Természetesen stacionárius áramlást feltételezve. A kontinuitás egyenletét differenciálva:

$$\partial \dot{m} = \partial(\rho \cdot A \cdot w)$$

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} + \frac{dw}{w} = 0$$

Az impulzusmegmaradás egyenlete:

$$-dp = \rho \cdot w \cdot dw$$

Összevonva és rendezve:

$$(Ma^2 - 1) \cdot \frac{dw}{w} = \frac{dA}{A}$$

A kapott kifejezésből több következtetést is levonhatunk:

- Ha $Ma < 1$, és $\frac{dw}{w} > 0$, vagyis gyorsuló áramláshoz $\frac{dA}{A} < 0$, az áramlás irányában szűkülő keresztmetszet, vagyis konfúzor, $\frac{dw}{w} < 0$, lassuló áramláshoz pedig bővülő keresztmetszet, másnéven diffúzor tartozik.
- Ha $Ma > 1$, és $\frac{dw}{w} > 0$, vagyis gyorsuló áramláshoz $\frac{dA}{A} > 0$, az áramlás irányában szűkülő keresztmetszetű csövet – diffúzort – kell használni.
- $\frac{dA}{A} = 0$ abban az esetben, ha $\frac{dw}{w} = 0$, vagy ha $Ma = 1$. Ha a keresztmetszet ezen szélső értékénél az áramlási sebesség nő, a hangsebességnél kisebb sebességű, gyorsuló áramlás a keresztmetszet minimumánál éri el a hangsebességet.

2.2.5. A gáz állapotjelzői a kritikus keresztmetszetben

A legszűkebb (kritikus) keresztmetszetben $Ma = 1$, azaz $w_k = c$. Felírva a Bernoulli egyenletét a tartály belsejének egy adott pontja, és a legszűkebb keresztmetszet között, figyelembe véve az iménti megállapításokat, a következő kifejezéshez jutunk:

$$i_t - i_k = \frac{w_k^2}{2} - \frac{w_t^2}{2}$$

Ahol $w_t = 0$, mivel a tartályban a fluid nincs áramlásban. $w_k = c$, vagyis a kritikus keresztmetszetben eléri a közeg a hangsebességet, az előző megállapításokkal összhangban:

$$c_p \cdot T_t - c_p \cdot T_k = \frac{c^2}{2}$$

Az izobár fajhőt állandónak tekintve, az egyetemes gázállandót, és az adiabatikus kitevőt helyettesítve az összefüggésbe, majd a kapott egyenletet rendezve:

$$\frac{T_k}{T_t} = \frac{2}{\kappa + 1} = (0,83)$$

Megkapjuk a kritikus keresztmetszetben áramló, és a tartályban levő közeg hőmérsékletének arányát, mely csak az adiabatikus kitevőtől függ. Ez utóbbi kétatomos gázok vagy keverékek esetén (pl. levegő) $\kappa = 1,4$.

Az ideális gáztörvényt felhasználva, és behelyettesítve a fenti összefüggésbe, a többi releváns állapotjelző-arány is kifejezhető:

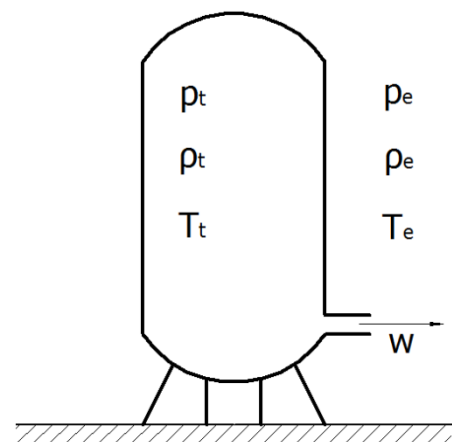
$$\frac{p_k}{p_t} = \left(\frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} = (0,53)$$

$$\frac{\rho_k}{\rho_t} = \left(\frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{1}{\kappa - 1}} = (0,63)$$

2.2.6. A Laval-nyomásviszony

Feltételezzük, hogy a tartály falán egy „egyszerű” kiömlőnyílás van, melynek legszűkebb keresztmetszete maga a kiömlés helye. Tegyük fel, hogy az ellennyomás (p_e) maga az atmoszférikus nyomás, és a tartálynyomás változtatható Ha $\frac{p_e}{p_t} \cong 1$, jól használható az összenyomhatatlan közegekre definiált Bernoulli-egyenlet is, az áramlási sebesség (w) meghatározására. Ha azonban növeljük a tartályban levő nyomást, a gáz sűrűsége olyan mértékben fog változni, hogy a $\rho = const$ feltevés már jelentős hibát okoz. Ekkor az összenyomhatatlan közegekre definiált Bernoulli-egyenlettel kell számolni a kiáramlási sebességet:

$$w = \sqrt{\frac{2 \cdot \kappa}{\kappa - 1} \cdot R \cdot T_t \cdot \left(1 - \left(\frac{p_e}{p_t}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right)}$$



5. ábra – Kiömlés tartályból

Látható ebből a már jól ismert összefüggésből, hogy a tartályban levő nyomás növelésével növelhetjük a kiáramlási sebességet. A 2.2.5 részben levezetett arányosságoknak megfelelően, ha a nyomásviszony eléri a 0,53-os értéket, a kiáramlási sebesség a helyi hangsebességet éri el.

Azonban ha tovább növeljük a tartálynyomást, azt tapasztalhatjuk, hogy a kiáramlási sebesség nem nő tovább, hanem állandó marad. Meglepő tulajdonság, hogy a nyomás a legszűkebb keresztmetszetben (p_k) nem egyezik meg a p_e ellennyomással, hanem nagyobb annál, $\frac{p_k}{p_t} = 0,53$ aránynak megfelelően, tehát a tartálynyomástól függően.

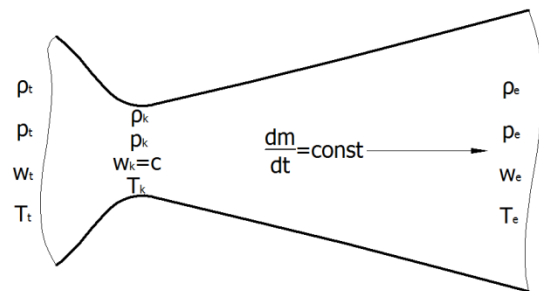
A kiáramló közeg természetesen a nyomáskülönbség hatására gyorsul. Növelve a tartályban a nyomást, egy „hullám” indul a tartályból a kiömlőnyílás felé, megváltoztatva a nyomásmegoszlást a kiáramlás környezetében. A növekvő nyomáskülönbség hatására a közeg gyorsulni fog. Azonban ha elérjük a helyi hangsebességnek megfelelő áramlási sebességet, a tartálynyomás további növelésével kapcsolatos információ, ami gyakorlatilag egy nyomáshullám, és a közegben hangsebességgel terjed, nem képes átjutni a legkisebb

keresztmetszeten. A gáz ebben az esetben nem képes a legszűkebb keresztmetszetig a tartályban levő nyomásról a külső nyomásra expandálódni. Így tehát a tartálynyomás változása nem tudja önmagában módosítani a nyomásmegoszlást a tartály és a kiáramlás legszűkebb keresztmetszete között.

Azt a $\frac{p_e}{p_t}$ nyomásviszonyt, amelynél a kiáramlási sebesség a legszűkebb keresztmetszetben eléri a helyi hangsebességet, *kritikus nyomásviszonynak*, vagy *Laval-nyomásviszonynak* nevezzük ($\frac{p_k}{p_t} = 0,53$).

2.2.7. A Laval-fúvóka üzeme

Ahogy már említve volt, a szűkülő csőtoldatot egy bővülő csővel egészítjük ki, amivel az ábrán látható Laval-fúvókát kapjuk. Az általam a későbbiekben méretezendő Laval-fúvóka a tartályból az atmoszférába engedi ki a munkaközeget, pusztán a szemléletesség céljából.



6. ábra – A Laval-fúvóka (Laval-cső)

A belépési, kritikus, illetve kiráramlási keresztmetszet állapotjelzőinek arányait a már levezetett egyenletek összevonásával határozhatjuk meg:

$$\frac{\rho_k}{\rho_t} = \left(\frac{p_e}{p_t}\right)^{\frac{1}{\kappa}}$$

$$\frac{T_k}{T_t} = \left(\frac{p_e}{p_t}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$$

Az eddigi megfontolások összesítésénél a kontinuitás törvényéből indulunk ki, melyet felírunk a legszűkebb és a kilépő keresztmetszetre:

$$\dot{m} = \rho_k \cdot w_k \cdot A_k = \rho_e \cdot w_e \cdot A_e$$

A kritikus keresztmetszetre, a 2.2.5 rész arányosságainak felhasználásával:

$$\dot{m} = 0,63 \cdot \rho_t \cdot \sqrt{\kappa \cdot R \cdot 0,83 \cdot T_t} \cdot A_k$$

Illetve a kilépő keresztmetszetre, Bernoulli egyenletének és a 2.2.6 rész összefüggésének felhasználásával:

$$\dot{m} = \rho_t \cdot \left(\frac{p_e}{p_t}\right)^{\frac{1}{\kappa}} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \kappa}{\kappa - 1} \cdot R \cdot T_t \cdot \left(1 - \left(\frac{p_e}{p_t}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right)} \cdot A_e$$

A fenti két összefüggésből, ismerve a tartályban levő sűrített levegő állapotjelzőit, valamint a külső levegőét, kiszámítható a *kritikus keresztmetszet*. Először kiszámítjuk a tömegáramot, majd ez alapján a kritikus keresztmetszetet, valamint a kilépési keresztmetszetet is.

3. Fizikai modell és kialakítás

A Laval-fúvóka elsődleges alkalmazási területét a rakétamotorok képezik, így a fizikai és a matematikai modellt ennek fényében alkotom meg.

Dióhéjban, egy tipikus rakétamotor fúvókából, égéstérből, és a befecskendezőből áll. A fúvóka alapvető feladata, hogy az égéstérben levő hajtóanyagból felszabaduló kötési- ill. majd hőenergiát kinetikai energiává alakítsa.

Az égéstérben keletkező, lassan mozgó, nagy nyomású, magas hőmérsékletű gáz a fúvóka által nagysebességű és alacsonyabb nyomású, valamint hőmérsékletű közeggé alakul át. Mivel a rakéta hajtóereje a tömeg és a sebesség szorzata, ezért igen magas gázsebességre van szükség.

Ezt a feladatot a konvergens-divergens fúvóka, vagy másnéven Laval-fúvóka, igen egyszerű geometriával, változó keresztmetszettel (átmérővel) teszi lehetővé.

Szerkezetileg a fúvóka egy *konvergens* (konfúzor) és egy *divergens* (diffúzor) részből áll. A két rész közötti legszűkebb keresztmetszet a kritikus keresztmetszet, vagy másnéven a fúvókatorok. A diffúzor vége pedig a kilépő keresztmetszet. Esetemben belépő keresztmetszetről is van értelme beszélni, hiszen a későbbiekben következő szemléltető méretezésnél alkalmazott levegő tartályból áramlik ki, és csak ez után lép be a fúvókába.

Ezt azért hangsúlyozom ki, mert a rakétamotoroknál a konfúzor rész gyakorlatilag egyben van az égéstérrel, így pedig nem beszélhetünk konkrét belépő keresztmetszetről.

3.1. Kúpos fúvóka fizikai modellje

A korai rakétamotorok tervezésénél szinte kizárólag kúpos fúvókát alkalmaztak, amely minden szempontból kielégítette az akkori igényeket. A kúpos forma könnyen legyártható, és könnyedén átalakítható a keresztmetszete nagyobb átalakítások nélkül. Egy általános kivitelezés a 7. ábrán látható.

3.1.1. Kúpos fúvóka méretezése

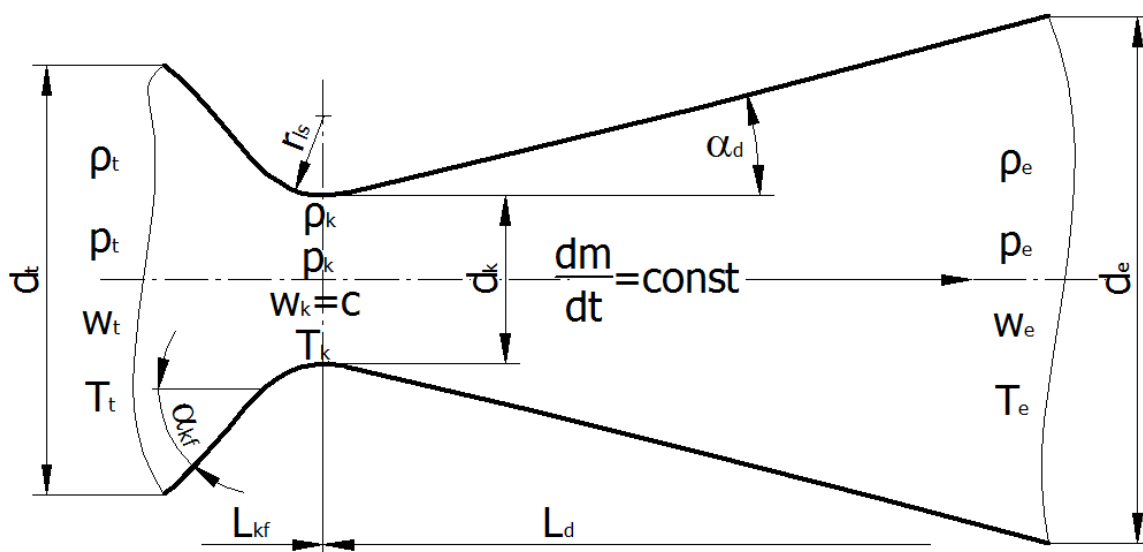
A kritikus keresztmetszetenél a fúvóka kontúrja egy r_{ls} sugarú körív, melynek értéke a kritikus keresztmetszet sugarától függ, értéke pedig általánosságban $(0,5 \div 1,5) \cdot r_k$ közötti. A konfúzor rész félkúpszöge, α_{kf} általában 20° és 45° közötti, míg a diffúzor rész félkúpszöge, α_d 12° és 18° közötti nagyságú lehet. A 15° félkúpszögű diffúzor rész egyfajta standardnak számít, mert jó kompromisszum a hossz, a súly és a teljesítmény között.

Mivel a kúpos fúvókában áramló nagysebességű gázok sebességvektorainak függőleges irányú komponensei is vannak, bizonyos sebességcsökkenéssel kell számolni kilépésnél. Ez gyakorlatilag a fúvóka hatásfoka, a kilépő gáz mozgásmennyisége az ideálishoz viszonyítva.

A félkúpszög függvényében kiszámítható mekkora sebességcsökkenésre lehet számítani kilépésnél, a következő összefüggéssel:

$$\eta_{fv} = \frac{1 + \cos \alpha_d}{2} \leq 1$$

A fenti összefüggés értéke 1, ideális esetben. $\alpha_d = 15^\circ$ esetén pedig $\eta_{fv} = 0,983$, ami annyit jelent, hogy a közeg kiáramlási sebessége 98,3%-a az ideálisnak.



7. ábra – Kúpos fúvóka fizikai modellje

A hosszúságok kiszámítása egyszerű trigonometriai összefüggéssel lehetséges, melynek a levezetését az egyszerűségének fényében mellőzöm:

$$L_{kf} = \frac{d_t - d_k}{2 \cdot \tan \alpha_{kf}} \text{ illetve } L_d = \frac{d_e - d_k}{2 \cdot \tan \alpha_d}$$

3.2. Harangszerű fúvóka fizikai modellje

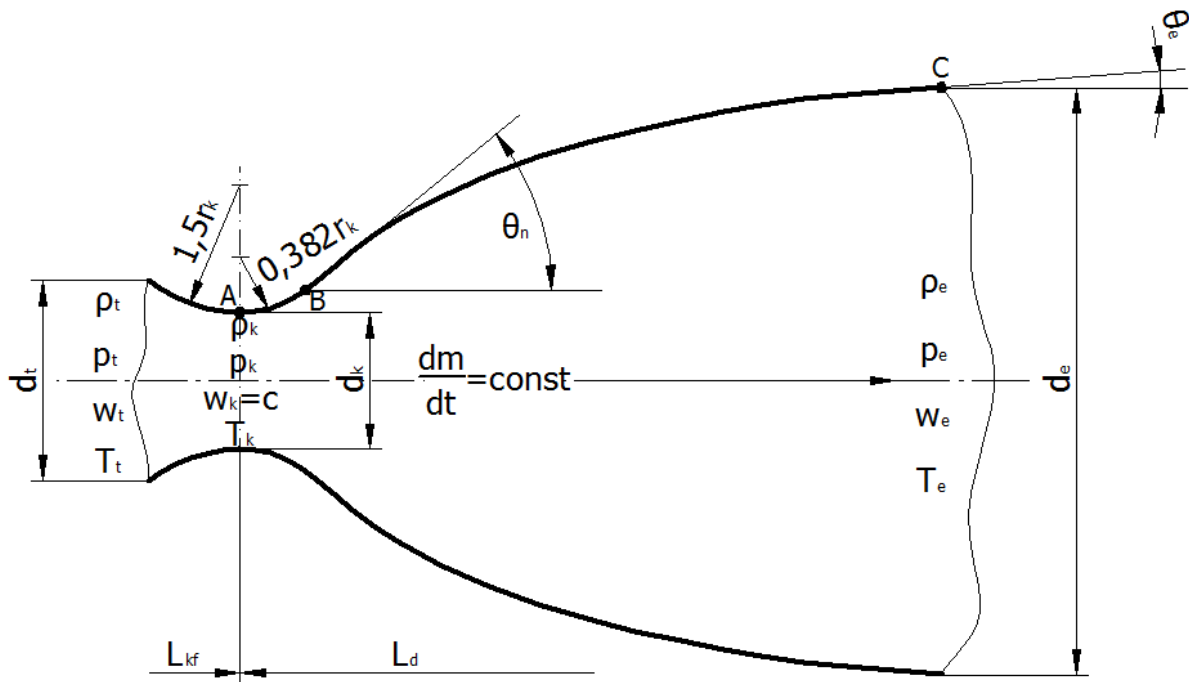
A nagyobb teljesítmény és a rövidebb hossz érdekében az újabb megvalósítások alakja harangszerű vagy parabolikus. Ezek a megoldások természetesen összetettebbek a kúposnál, de az előnyeik miatt manapság a leggyakrabban alkalmazottak. Keresztmetszete a 8. ábrán látható.

3.2.1. Harangszerű fúvóka méretezése (parabolikus approximáció)

A kialakítását illetően, a konvergencia rész, a kritikus keresztmetszet belépéséig egy körív, melynek sugara a kúpos fúvókánál elmondottakkal analóg $1,5 \cdot r_k$, a kritikus sugár másfélszerese.

Közvetlenül a kritikus keresztmetszet után, a divergencia rész kezdeténél egy ún. gyors-expansziós rész van kialakítva (A-B). Ennek a résznek a kontúrja szintén egy körív és a kritikus keresztmetszet sugarához viszonyított, $0,382 \cdot r_k$. Ezen a részen kezdődik a gázok expansziója. A kontúrvonal érintője, és a fúvóka tengelye közötti szög itt a legnagyobb, így a közeg expansziója itt lesz a legrohamosabb.

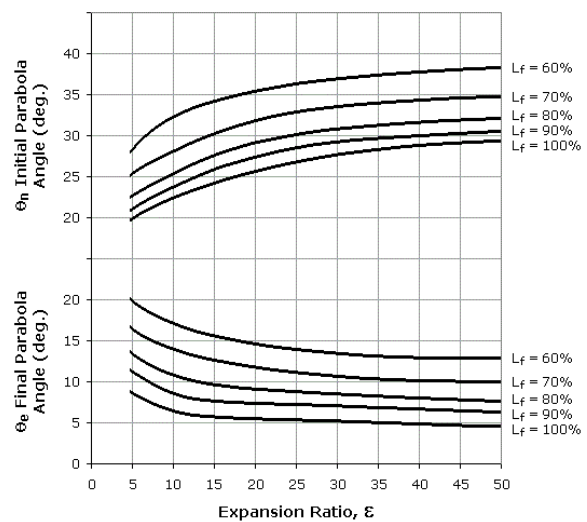
A következő szakasz (B-C) kontúrja gyakorlatilag egy parabola, és döntő szerepet játszik az áramlás axiálissá tételében, hiszen a parabola érintőjének szöge fokozatosan csökken a kilépési keresztmetszetig, ezzel irányítva a gáz részecskéinek mozgását.



8. ábra – Harangszerű fúvóka fizikai modellje

Méretezésnél a harangszerű fúvóka diffúzorának hosszát (L_d) a 15°-os kúpszögű kúpos fúvókáéhoz viszonyítjuk, és ennek a hosszak a bizonyos hányadával számolunk (L_f a 15. ábrán). Vagyis a kúpos fúvóka a referencia. Erre azért van szükség, mivel az alapvető cél az, hogy minél rövidebb (és így könnyebb) legyen maga a szerkezet. Ezen kívül szükség van a kritikus átmérőre (d_k), valamint a kontúrvonal nagyobbik részét képező parabola kezdeti érintőjének szögére (θ_n), illetve kilépési érintőjének szögére (θ_e).

A fent említett szögek az ún. *expanziós felületi arány* függvényei. Ez az arányszám jelentős pontja a harangszerű fúvóka tervezésének, mert a kilépési keresztmetszetet hagyományosan ezzel az összefüggéssel szokás kiszámítani. Matematikailag a kilépési keresztmetszet, valamint a kritikus keresztmetszet hányadosát jelöli. Arányszám lévén dimenziótlan szám:



9. ábra – Az expansziós felületi arány a parabola jellemző szögeinek függvényében

$$\varepsilon = \frac{A_e}{A_k} [-]$$

Ugyan a harangszerű fúvókáknak legfeljebb 1%-kal jobb a hatásfokuk, mint a kúpos társaiknak, de szerkezetileg rövidebbek és könnyebbek lehetnek. Széleskörűen alkalmazzák őket természetesen rakétáknál, ahol a súly döntő tényező. Persze mivel szerkezetileg összetettebbek, így nehezebb is őket legyártani, ez pedig a magasabb árat vonja maga után.

3.3. Összegzés

Mivel a gázok áramlási sebessége a fúvóka konvergens részében viszonylag alacsony, minden megfelelően megmunkált konfúzorban nagyon alacsony mértékű energiacsökkenéssel kell számolni. Éppen ezért méretezéskor a konfúzor szerepe kevésbé jelentős.

Ezzel ellentétben a divergens rész kontúrja döntő szerepet játszik a fúvóka teljesítményében, a nagy áramlási sebességek következtében. Az optimális fúvóka kontúrvonal kialakításánál a következő méretezési megfontolásokat kell figyelembe venni:

- A fúvóka kilépési keresztmetszeténél a legnagyobb impulzus érdekében a gázok áramlása párhuzamos kell hogy legyen a fúvóka tengelyével,
- Minimális örvénylésből adódó veszteségek a fúvókán belül,
- Lehető legrövidebb hossz, a súly, a súrlódási veszteségek, és a minél hatásosabb hűtés elérése érdekében,
- Könnyű legyárthatóság.

Minden hirtelen keresztmetszetváltozás a fúvóka kontúrjában kerülendő, a turbulenciából eredő veszteségek elkerülése érdekében. Ideálisan a kritikus keresztmetszet is egy éles, vonalszerű körív, a gyakorlatban azonban lekerekítésre van szükség, ellentétben a kilépési keresztmetszettel, amely élesen végződik.

4. Matematikai modell

4.1. A modellben alkalmazott egyszerűsítések

Az áramlásban levő összenyomható közeg tulajdonságai, a sebesség, a nyomás, a sűrűség és a hőmérséklet függenek a következőktől:

1. A keresztmetszet változásától
2. A súrlódástól
3. A hőveszteségektől

Mivel a fentiek figyelembevételével meglehetősen összetett matematikai modellt kapnánk, ezért be kell vezetni az ideális kompresszibilis közeg egydimenziós áramlását, amit a következő szempontok jellemeznek:

- A tömegárama állandó (stacionárius áramlás), vagyis időben nem változó
- Az áramlás iránya egyenesvonalú, illetve egybevágó a fúvóka szimmetriatengelyével
- Az áramlás izentropikus, vagyis súrlódásmentes és adiabatikus
- A közeg ideális gáz, tehát érvényes rá az ideális gáztörvény

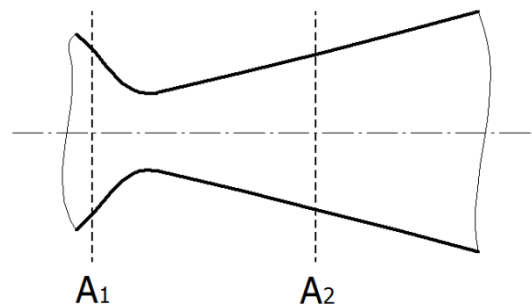
Ahogy már az előzőekben említve volt, a fúvóka tervezésének fő célja, hogy az égéstermékek sebességét a lehető legnagyobb sebességre gyorsítsa. Ehhez elengedhetetlen a megfelelő profil kialakítása, izentropikus áramlást feltételezve. Izentropikus áramlásról (2.1.2.2) akkor beszélünk, ha az áramlás jellemzői kizárólag a keresztmetszet nagyságától függenek, vagyis súrlódásmentes és adiabatikus áramlás esetén. Ez természetesen jelentősen leegyszerűsíti a problémamegoldást.

4.2. Állapotjelzők változása a Mach-szám függvényében

4.2.1. Alkalmazott fundamentális törvényszerűségek

1. A kontinuitás törvénye (2.1.1)
2. Az energiamegmaradás törvénye (2.1.2)
3. Az impulzusmegmaradás törvénye (2.1.3)
4. Az általános gáztörvény

A matematikai modell megalkotásánál elsőként az energiamegmaradás törvényéből indulunk ki. A fúvókában áramló közeg össz. energiájának átalakulását bármely két keresztmetszet között a következőképpen lehet felírni:



10. ábra – Tetszőleges keresztmetszetek a fúvókában

$$i_1 - i_2 = \frac{w_2^2}{2} - \frac{w_1^2}{2} = c_p \cdot (T_1 - T_2)$$

Ez az összefüggés nagyjából meg is mutatja hogy működik a fúvóka. A gáz entalpiacsökkenéséből fakadóan megnő a kinetikai energiája. A hőmérséklet is csökken az expanzió következtében, ezzel együtt pedig a nyomás is. A gáz fajlagos hőkapacitását viszont megközelítőleg állandónak tekintjük.

4.2.2. Hőmérséklet arány

A fenti megfontolásból leszűrhető, hogy a munkaközeg jellemzői az áramlási sebesség függvényei. Ha le szeretnénk írni az áramló gáz állapotát a fúvóka bármely keresztmetszetében, be kell vezetnünk egy viszonyítási állapotot. Tegyük fel, hogy a viszonyítási állapot a tartályban levő sűrített levegő, mely a szelep nyitásáig nincs mozgásban, tehát $w_1 = w_t = 0$ illetve $w_2 = w$.

Az entalpiaváltozással kifejezve a következőképpen alakul:

$$\frac{w^2}{2} = c_p \cdot (T_t - T)$$

Innen kifejezve T_t -t:

$$T_t = T + \frac{w^2}{2 \cdot c_p}$$

Majd elosztva az egész kifejezést T -vel:

$$\frac{T_t}{T} = 1 + \frac{w^2}{2 \cdot c_p \cdot T}$$

Megkapjuk a tartályban levő közeg, és a fúvóka bármely keresztmetszetében áramló közeg hőmérsékleteinek arányát. Mivel a fúvóka hosszán a Mach-szám monoton növekszik, ezért megfelelő a hőmérséklet arányt a Mach-szám függvényében felírni. Ehhez szükség van a következő összefüggésekre:

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v} \quad \wedge \quad R = c_p - c_v$$

A két egyenlet összevonásával és c_p -t kifejezve:

$$c_p = \frac{\kappa \cdot R}{\kappa - 1}$$

Ezt az egyenletet behelyettesítve a hőmérséklet arány egyenletébe, a következő eredményt kapjuk:

$$\frac{T_t}{T} = 1 + \frac{w^2}{\frac{2 \cdot \kappa \cdot R \cdot T}{\kappa - 1}}$$

Behelyettesítve a Mach-számot a fenti összefüggésbe, megkapjuk a közeg hőmérsékleti arányának változását a Mach-szám függvényében. Ehhez szükség van a 2.2.1 és a 2.2.2 részben tárgyalt összefüggésekre, melyek a következők:

$$c = \sqrt{\kappa \cdot R \cdot T} \quad \wedge \quad Ma = \frac{w}{c}$$

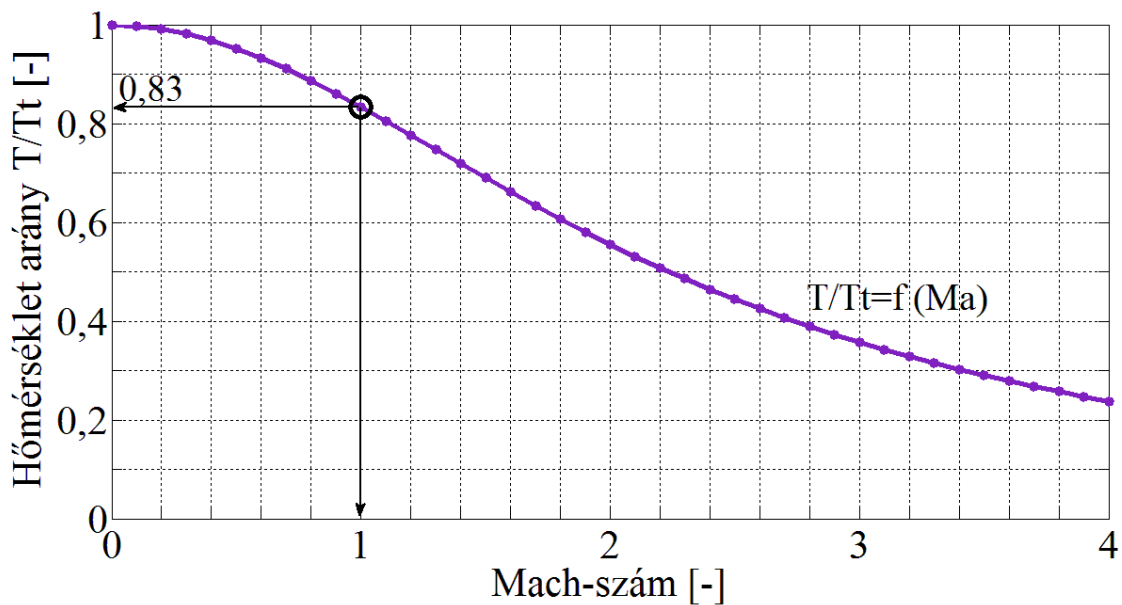
Figyelembe véve ezt a két egyenletet, a hőmérséklet arány a következőképpen alakul:

$$\frac{T_t}{T} = 1 + \frac{Ma^2}{\frac{2}{\kappa - 1}}$$

Rendezve a Mach-szám és a hőmérsékleti arány összefüggését, az egyenlet végső alakja:

$$\frac{T}{T_t} = \frac{1}{1 + \frac{\kappa - 1}{2} \cdot Ma^2}$$

Ezt a függvényt könnyedén lehet ábrázolni diagramban, szemléletesebbé téve ezzel a hőmérsékletváltozás karakterisztikáit, mint ahogyan a 11. ábrán is látható, levegő esetére ($\kappa = 1,4$):



11. ábra – A levegő hőmérséklet arányának változása a Mach-szám függvényében

- *Elemzés*

Természetesen 0 Mach számnál a hőmérsékleti arány 1, mivel a tartályban levő állapot a referenciaállapot, ha pedig nincs áramlásban a közeg, a hőmérséklete megegyező a tartályban levő gáz hőmérsékletével.

A Mach-szám növekedésével a munkaközeg hőmérséklete szigorúan monoton csökkenő tendenciát mutat, a kritikus keresztmetszetben elérve a tartályban levő hőmérsékletének a 83%-át, mint ahogy az a 2.2.5-ös részben már bizonyította lett.

A kritikus keresztmetszetenél a görbe váltja konvexitását is, tehát itt a függvénynek inflexió pontja van. A Mach-szám további növekedésével, vagyis a kilépési keresztmetszet felé a hőmérsékleti-arány szintén csökken, és a nullához közelít, de természetesen végtelen hosszúságú diffúzor kellene ahhoz, hogy a levegő hőmérséklete kilépésnél nulla Kelvin legyen.

4.2.3. Nyomás arány

A következő vizsgálandó paraméter a nyomás arány. Ugyanúgy, mint a hőmérsékletnél, a tartályban nyugalomban levő munkaközeg nyomását, és a fúvóka tetszőleges keresztmetszetében áramló közeg nyomását viszonyítjuk egymáshoz.

Ehhez az imént levezetett hőmérséklet arány és Mach-szám összefüggéséből indulhatunk ki. Ugyanakkor ki kell fejezni a hőmérsékletet a nyomással, az ideális gáztörvény segítségével, ami matematikailag a következőképpen fest:

$$p \cdot v = R \cdot T$$

Behelyettesítve ezt a hőmérséklet arány összefüggésébe, és egyszerűsítjük, a következő eredményre jutunk:

$$\frac{p \cdot v}{p_t \cdot v_t} = \frac{1}{1 + \frac{\kappa - 1}{2} \cdot Ma^2}$$

Illetve a sűrűséggel a fajlagos térfogatok helyett:

$$\frac{\frac{p}{\rho}}{\frac{p_t}{\rho_t}} = \frac{1}{1 + \frac{\kappa - 1}{2} \cdot Ma^2}$$

Látható, hogy a közeg sűrűsége is szerepet játszik a függvényben, de így két változóval nem lehetne kivizsgálni a nyomásváltozás tendenciáját. Ezért szükséges a 2.1.2.2 részben tárgyalt, izentropikus állapotváltozás törvényszerűségének alkalmazása, amely a következő:

$$\frac{p}{\rho^\kappa} = \frac{p_t}{\rho_t^\kappa} = const$$

Innen kifejezhető a sűrűség a nyomás függvényében:

$$\rho = \left(\frac{p}{p_t}\right)^{\frac{1}{\kappa}} \cdot \rho_t$$

Ezt az összefüggést behelyettesítve a Mach-szám függvénybe, a sűrűségek egyszerűsödhetnek:

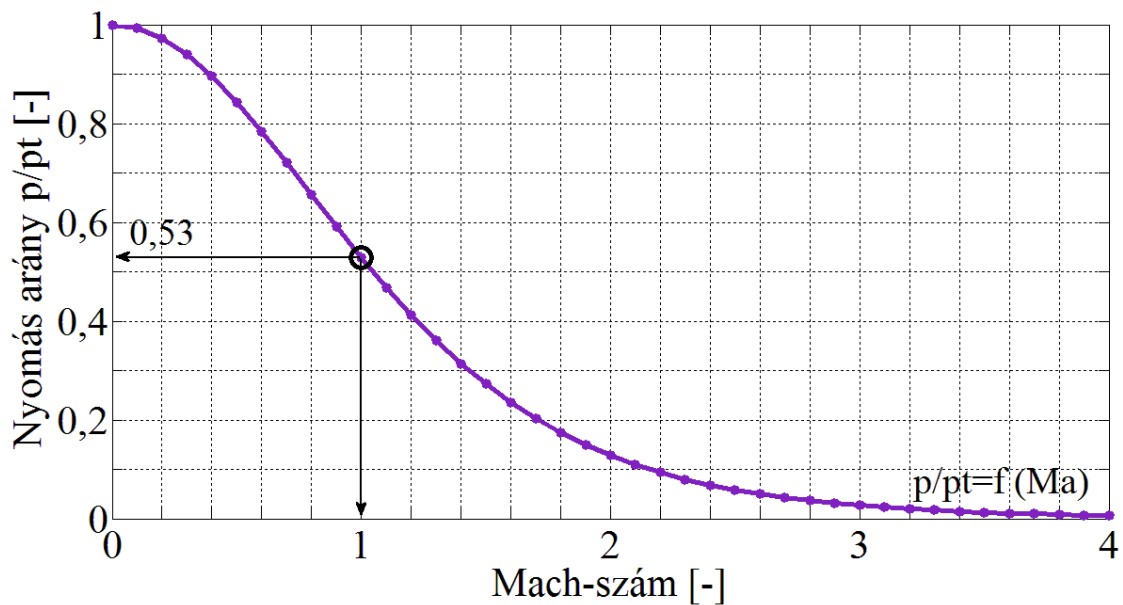
$$\frac{p \cdot \rho_t}{p_t \cdot \left(\frac{p}{p_t}\right)^{\frac{1}{\kappa}} \cdot \rho_t} = \frac{1}{1 + \frac{\kappa - 1}{2} \cdot Ma^2}$$

$$\frac{p}{p_t} \cdot \left(\frac{p}{p_t}\right)^{-\frac{1}{\kappa}} = \frac{1}{1 + \frac{\kappa - 1}{2} \cdot Ma^2}$$

$$\left(\frac{p}{p_t}\right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} = \frac{1}{1 + \frac{\kappa - 1}{2} \cdot Ma^2}$$

A függvény rendezésével pedig el is jutunk annak végleges alakjához, amelyet már könnyedén ábrázolhatunk is:

$$\frac{p}{p_t} = \left(\frac{1}{1 + \frac{\kappa - 1}{2} \cdot Ma^2}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}$$



12. ábra - A levegő nyomásának Mach-szám függése

- **Elemzés**

A közeg nyomása, akárcsak a hőmérséklete, szigorúan monoton csökkenő értékű. A gáz a fúvókán áthaladva expandálódik, nyomása ennek következtében csökken. A Mach-szám növekedésével a nyomás arány, illetve ezzel együtt az adott keresztmetszetben tapasztalható gáznyomás a nullához közelít.

Természetesen ez szintén ideális eset, hiszen csak akkor lehetséges, ha a külső nyomás 0, azaz a gázt vákuumba engedjük ki. A kritikus keresztmetszetben létrejövő arányosság azonban általános érvényű, az elméleti alapoknál tárgyaltaknak megfelelően.

4.2.4. Sűrűség arány

A harmadik paraméter a sűrűség. A levezetés nem sokban különbözik a nyomás aránynál elmondottakkal. Ugyanúgy, mint a nyomásnál, a tartályban nyugalomban levő munkaközeg sűrűségét, és a fúvóka tetszőleges keresztmetszetében áramló közeg sűrűségét viszonyítjuk egymáshoz.

A hőmérséklet arány összefüggésébe szintén az ideális gáztörvényt helyettesítjük be:

$$\frac{\left(\frac{\rho}{\rho_t}\right)^\kappa \cdot p_t}{\frac{\rho}{\frac{p_t}{\rho_t}}} = \frac{1}{1 + \frac{\kappa - 1}{2} \cdot Ma^2}$$

Ellenben jelen esetben nem a sűrűséget, hanem a nyomást fejezzük ki az izentropikus állapotváltozás törvényszerűségéből:

$$p = \left(\frac{\rho}{\rho_t}\right)^\kappa \cdot p_t$$

És ezt a kifejezést helyettesítjük a nyomás helyére:

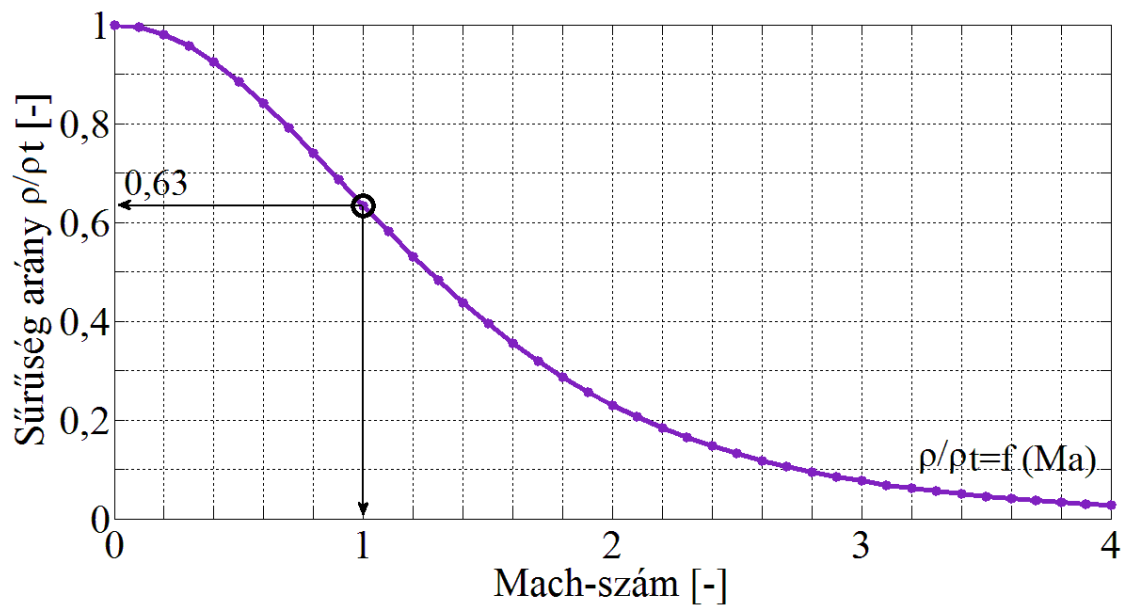
$$\frac{\left(\frac{\rho}{\rho_t}\right)^\kappa \cdot \rho_t \cdot p_t}{\rho \cdot p_t} = \frac{1}{1 + \frac{\kappa - 1}{2} \cdot Ma^2}$$

$$\left(\frac{\rho}{\rho_t}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{\rho}{\rho_t}\right)^\kappa = \frac{1}{1 + \frac{\kappa - 1}{2} \cdot Ma^2}$$

$$\left(\frac{\rho}{\rho_t}\right)^{\kappa-1} = \frac{1}{1 + \frac{\kappa - 1}{2} \cdot Ma^2}$$

$\kappa - 1$ -edik gyököt vonva mindkét oldalból, megkapjuk az explicit sűrűségfüggvényt:

$$\frac{\rho}{\rho_t} = \left(\frac{1}{1 + \frac{\kappa - 1}{2} \cdot Ma^2} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}}$$



13. ábra - A levegő sűrűségének változása Mach-szám szerint

- **Elemzés**

Gyakorlatilag ugyanazok az elmondottak érvényesek a sűrűségnél, mint a nyomásnál. A függvény szigorúan monoton csökkenő, a határértéke pedig nulla, tehát horizontális aszimptótája maga a vízszintes tengely. Másszóval a sűrűség is nullához konvergál a Mach-szám növekedésével. A görbe konvexitása $Ma = 1$ -nél, a kritikus keresztmetszetenél vált.

4.2.5. Keresztmetszet arány

A keresztmetszet arány meghatározása a legfontosabb része a modellezésnek, mert bizonyítékot szolgáltat a fizikai modellnél elmondottakhoz.

A függvény definiálása valamelyest hasonlít az előzőekhez, azonban itt a 2.1.1 részben tárgyalt kontinuitás törvényéből indulunk ki. Szükség van továbbá az állapotjelzők levezetett arányosságaira is. Tehát minden eddig lefektetett összefüggésre szükség van, és ez jelenti a Mach-szám szerinti vizsgálat végső pontját. A függvény felállítása a kontinuitás törvényével kezdődhet:

$$\dot{m} = \rho \cdot w \cdot A = \rho_k \cdot w_k \cdot A_k$$

Gyakorlatilag ugyanúgy indulunk ki, mint az előzőekben. Azzal, hogy jelen esetben a viszonyítási pont maga a kritikus keresztmetszet. Így a többi keresztmetszet ennek fényében definiálható. Az áramlási sebesség a legszűkebb keresztmetszetben természetesen $w_k = c$, vagyis hangsebesség. A keresztmetszet arányt kifejezve tehát:

$$\frac{A}{A_k} = \frac{\rho_k \cdot c}{\rho \cdot w}$$

Az áramlási sebességet bármely keresztmetszetre kifejezhetjük a következő összefüggéssel, hogy a független változó a Mach-szám legyen:

$$w = Ma \cdot c = Ma \cdot \sqrt{\kappa \cdot R \cdot T}$$

Ezt a függvényt behelyettesítve a keresztmetszet arány függvényébe:

$$\frac{A}{A_k} = \frac{\rho_k \cdot \sqrt{\kappa \cdot R \cdot T_k}}{\rho \cdot Ma \cdot \sqrt{\kappa \cdot R \cdot T}}$$

$$\frac{A}{A_k} = \frac{\rho_k}{\rho} \cdot \frac{1}{Ma} \cdot \sqrt{\frac{T_k}{T}}$$

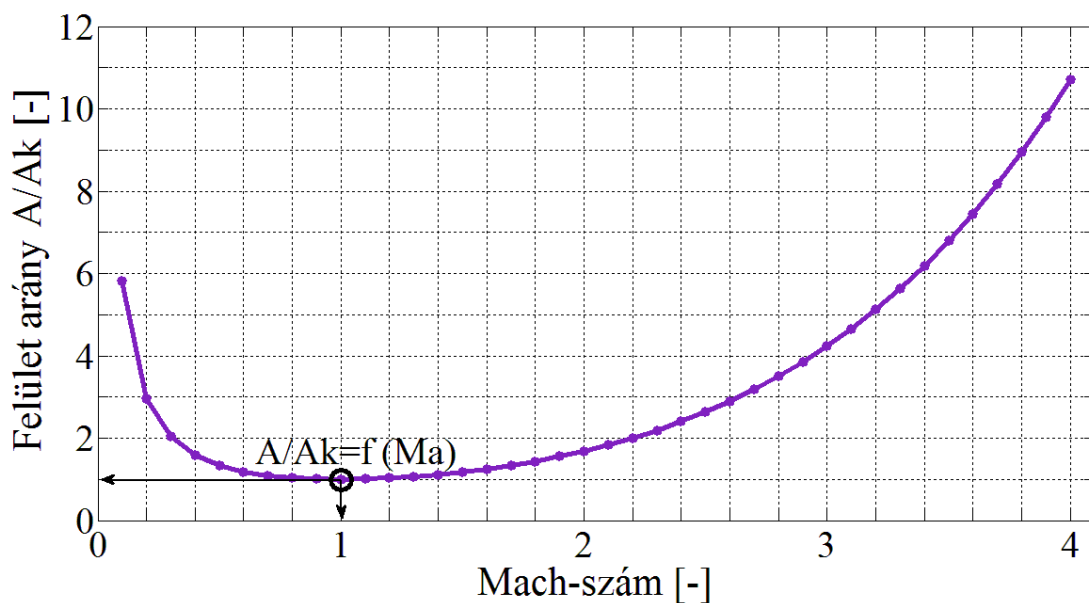
A lehetséges egyszerűsítésekkel a fenti egyenletet kapjuk. Itt szükségünk lesz az előzőekben levezetett arányosságokra, valamint a kritikus keresztmetszetben érvényes állapotjelző arányosságokra is, melyek az elméleti alapoknál lettek definiálva. Egyébként $Ma = 1$ feltétel behelyettesítése az általános függvényekbe, ugyanazokra az arányosságokra vezet. Ezen összefüggések alkalmazásával végül körvonalazódni látszik a végeredmény:

$$\frac{A}{A_k} = \frac{\left(\frac{1}{1 + \frac{\kappa - 1}{2}}\right)^{\frac{1}{\kappa - 1}}}{\left(\frac{1}{1 + \frac{\kappa - 1}{2} \cdot Ma^2}\right)^{\frac{1}{\kappa - 1}}} \cdot Ma \cdot \sqrt{\frac{\frac{1}{1 + \frac{\kappa - 1}{2}}}{\frac{1}{1 + \frac{\kappa - 1}{2} \cdot Ma^2}}}$$

Noha nem tűnik annak, de ez egy igen egyszerű összefüggés, melyet csak rendezni kell, hogy a végső függvényt megkaphassuk. A függő változó a keresztmetszet arány, a kritikus keresztmetszetre vonatkoztatva, a független változó pedig a Mach-szám:

$$\frac{A}{A_k} = \frac{1}{Ma} \cdot \left(\frac{1 + \frac{\kappa - 1}{2} \cdot Ma^2}{1 + \frac{\kappa - 1}{2}}\right)^{\frac{\kappa + 1}{2 \cdot (\kappa - 1)}}$$

Ennek az egyenlőségnek a felállításához szükség volt az eddigi összes ismeretre, de ezért cserébe egyúttal ez szolgáltatja a legfontosabb információkat és bizonyítékot is. A függvény szemléletesebben a következőképpen fest:



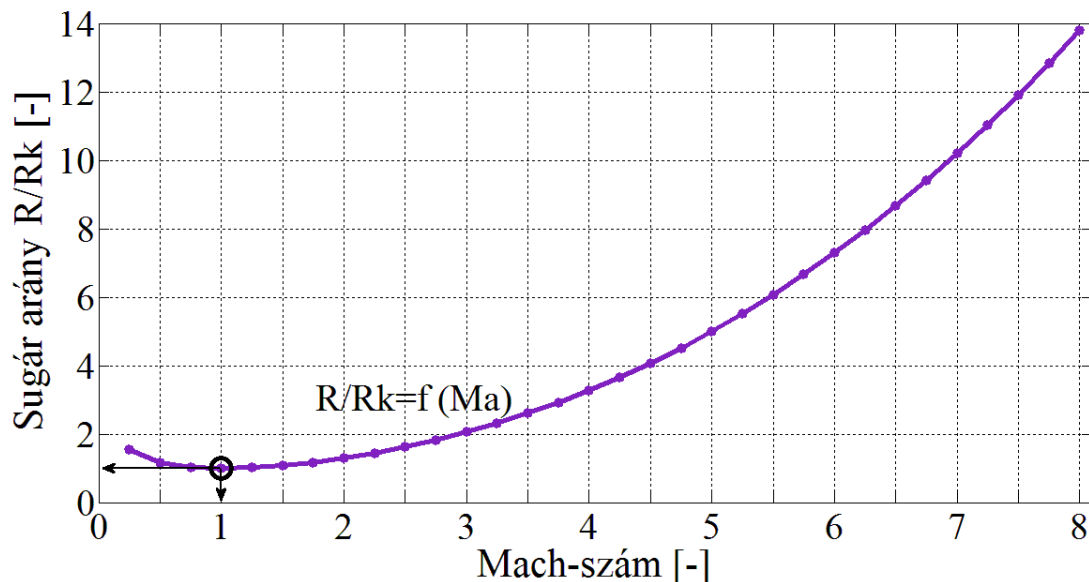
14. ábra - A fúvóka keresztmetszetének Mach-szám függése

- *Elemzés*

A keresztmetszet arány Mach-szám függésének ábrázolásával igen fontos konklúziót szűrhetünk le, melyet az elméleti alapoknál egyéb módon már bebizonyítottunk. Ezesetben viszont szemléletesebb módon, a diagramon, egyértelműen látszik, hogy egy konvergens-divergens csőre van szükség, melynek elengedhetetlen része a legkisebb keresztmetszet ahhoz, hogy a közeg átléphesse a hangsebességet.

A kritikus pontban a felület megegyezik a kritikus keresztmetszettel, enélkül pedig nem lehetne szuperszonikus sebességre gyorsítani a közeget. Tehát a fúvóka diffúzor része esszenciális a további gyorsításhoz. Az összefüggés exponenciális, minél nagyobb áramási sebességet szeretnénk elérni a kilépési keresztmetszetnél, annál nagyobb átmérőjű fúvókára van szükség.

Felvetődhet a kérdés, a divergens részben a függvény miért nem konkáv, ha a fizikai modellnél úgy definiáltuk. Nos, nyilván az elhanyagolások miatt, mivel ezek a levezetések ideális feltételek mellett érvényesek, melyen feltételek definiálva lettek a matematikai modell bevezetésénél.



14.1 ábra – Sugár arány a Mach-szám függvényében

A sugár arány ábrázolása természetesen a keresztmetszet arányon alapszik, hiszen a keresztmetszetek kifejezhetők a sugárral is. Ebben az esetben szemléletesebb képet kaphatunk a fúvóka tényleges – ideális – hosszmetsetéről, melyet az ábrázolt függvénynek a vízszintes tengely körüli forogtatásával kaphatunk meg.

A függvény konvexitása, illetve maga a függvény jellemzői sem változnak meg gyökeresen, hiszen a sugár kifejezésével csak gyököt kellett vonnunk az egész függvényből. Ez pedig természetesen az alapvető összefüggésen nem változtat.

5. Kúpos fúvóka szemléltető méretezése és szerkesztése

5.1. Méretezés

Kiindulási adatok:

$$p_e = 1 \text{ [bar]}$$

$$\rho_e = 1,204 \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$$

$$T_e = 20 \text{ [}^\circ\text{C]} = 293,16 \text{ [K]}$$

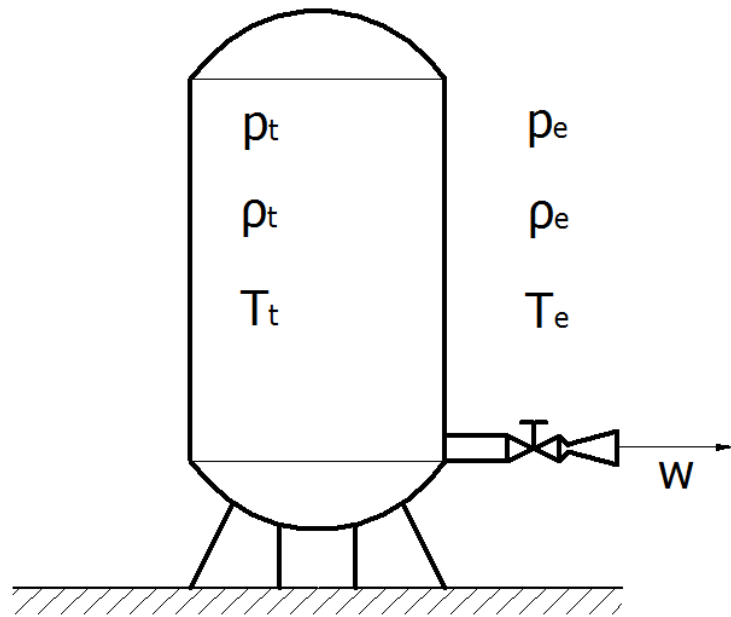
$$d_t = 20 \text{ [mm]}$$

$$p_t = 8 \text{ [bar]}$$

$$Ma_e = 4 \text{ [-]}$$

$$\alpha_{kf} = 30^\circ$$

$$\alpha_d = 15^\circ$$



15. ábra- Az elképzelt megvalósítás

Meghatározandó adatok:

$$d_e = ? \text{ [mm]}$$

$$d_k = ? \text{ [mm]}$$

$$L_d = ? \text{ [mm]}$$

$$L_{kf} = ? \text{ [mm]}$$

Tartály nyílásának keresztmetszete:

$$A_t = \frac{d_t^2 \cdot \pi}{4} = \frac{20^2 \cdot \pi}{4} = 314,1592 \text{ [mm}^2\text{]} = 3,14 \cdot 10^{-4} \text{ [m}^2\text{]}$$

Adiabatikus kompresszió:

$$T_t = T_e \cdot \left(\frac{p_e}{p_t}\right)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}} = 293,16 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1-1,4}{1,4}} = 531,04 \text{ [K]}$$

Ha feltételezzük, hogy a komprimált levegő a tartályban lehűl a környezeti hőmérsékletre, mielőtt kiengednénk, akkor erre a számításra nincs szükség, így $T_t = 293,16 \text{ [K]}$.

A levegő kompressziója, félideális gáz:

$$\rho_t = \frac{p_t}{R \cdot T_t} = \frac{8 \cdot 10^5}{287 \cdot 293,16} = 9,51 \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right]$$

Kiáramlási sebesség a tartályból:

$$w_t = \sqrt{\frac{2 \cdot \kappa}{\kappa - 1} \cdot R \cdot T_t \cdot \left[1 - \left(\frac{p_e}{p_t}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}\right]} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,4}{1,4 - 1} \cdot 287 \cdot 293,16 \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1,4-1}{1,4}}\right]}$$

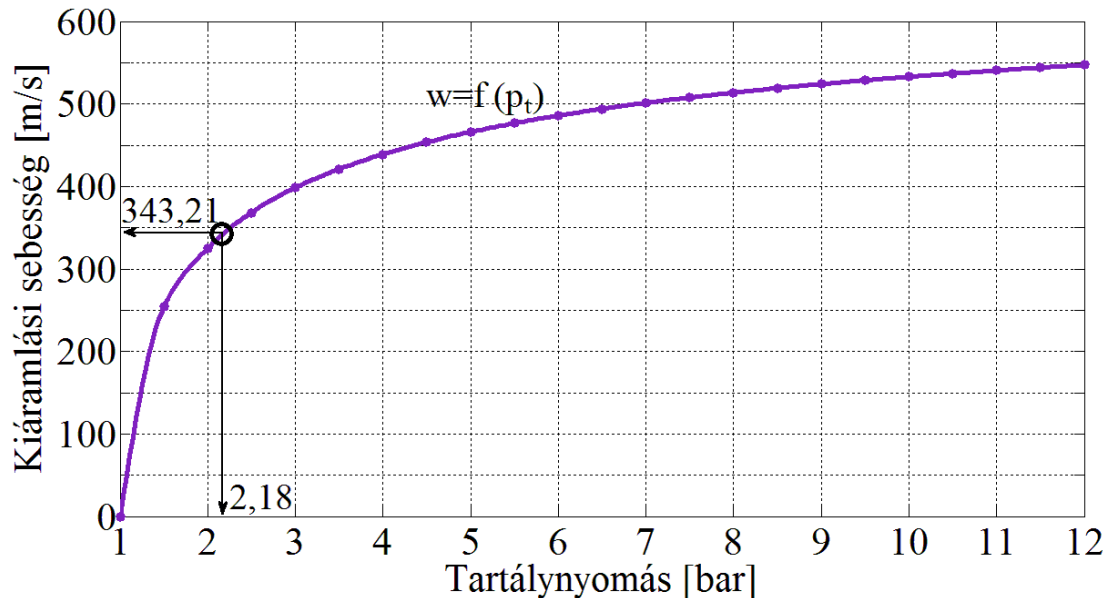
$$w_t = 513,64 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$$

A kiáramlási sebességet ábrázolhatjuk diagramban, a tartálynyomás, vagy a nyomás arány függvényében is. Ebben az esetben elégséges az tartálynyomástól való függést ábrázolni, hiszen a külső nyomás maga az atmoszferikus nyomás.

A 16. ábrán látható függvényen a jelölt értéktől jobbra elhelyezkedő rész alapesetben (szokványos nyílás esetén) nem érvényes, csak fúvóka alkalmazásával. Vagyis a hangsebesség egyfajta határértéket jelent kiáramlásnál (levegő esetén $c = 343,1 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$, 1 [bar] nyomáson és $20 \text{ [}^\circ\text{C]}$ hőmérsékleten).

Mivel a tartály nyomását 8 bar -nak választottam, az áramlási sebesség a szelep nyitásakor jóval hangsebesség felett lenne. Azonban az imént elmondottak értelmében a hangsebesség határt szab a tartályból kiáramló közeg sebességének, ezért $w_t = 343,1 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$.

Megjegyzendő, hogy a nyomás alatt levő tartályok szelepének nyitásakor hallható „pukkanás” annak eredménye, hogy a kiáramló közeg azonnal eléri a hangsebességet ($p_{tc} = 2,18$ [bar] nyomás, ill. afelett) viszont képtelen a további gyorsulásra.



16. ábra – A levegő kiáramlási sebessége a tartálynyomás függvényében

Tömegáram:

$$\dot{m} = A_t \cdot w_t \cdot \rho_t \cdot \left(\frac{p_e}{p_t}\right)^{\frac{1}{\kappa}} = 3,14 \cdot 10^{-4} \cdot 343,1 \cdot 9,51 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{1,4}} = 0,23 \left[\frac{kg}{s}\right]$$

Kritikus keresztmetszet:

$$A_k = \frac{\dot{m}}{0,63 \cdot \rho_t \cdot \sqrt{\kappa \cdot R \cdot 0,83 \cdot T_t}} = \frac{0,23}{0,63 \cdot 9,51 \cdot \sqrt{1,4 \cdot 287 \cdot 0,83 \cdot 293,16}}$$

$$A_k = 1,23 \cdot 10^{-4} [m^2]$$

Kritikus átmérő:

$$d_k = 2 \cdot \sqrt{\frac{A_k}{\pi}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{122,77}{\pi}} = 12,5 [mm]$$

Kritikus keresztmetszet lekerekítési sugara:

$$r_{1s} = 0,75 \cdot d_k = 0,75 \cdot 12,5 = 9,4 \text{ [mm]}$$

Kilépési keresztmetszet:

$$A_e = \frac{A_k}{Ma_e} \cdot \left(\frac{1 + \frac{\kappa - 1}{2} \cdot Ma_e^2}{1 + \frac{\kappa - 1}{2}} \right)^{\frac{\kappa + 1}{2 \cdot (\kappa - 1)}} = \frac{122,77}{4} \cdot \left(\frac{1 + \frac{1,4 - 1}{2} \cdot 4^2}{1 + \frac{1,4 - 1}{2}} \right)^{\frac{1,4 + 1}{2 \cdot (1,4 - 1)}}$$

$$A_e = 1315,94 \text{ [mm}^2\text{]}$$

Ha a kilépéskor meghatározott sebességű áramlást szeretnénk, nyilván a Mach-szám függvényében felírt felület arány egyenletéből kell kiszámítani a kilépési keresztmetszetet. Egyébként természetesen más módon is el lehet jutni ehhez az eredményhez.

Kilépési átmérő:

$$d_e = 2 \sqrt{\frac{A_e}{\pi}} = 2 \sqrt{\frac{1315,94}{\pi}} = 40,93 \text{ [mm]}$$

A fúvóka konfúzor részének hossza:

$$L_{kf} = \frac{d_t - d_k}{2 \cdot \tan \alpha_{kf}} = \frac{20 - 12,5}{2 \cdot \tan 30^\circ} = 6,5 \text{ [mm]}$$

A fúvóka diffúzor részének hossza:

$$L_d = \frac{d_e - d_k}{2 \cdot \tan \alpha_d} = \frac{41 - 12,5}{2 \cdot \tan 15^\circ} = 53,18 \text{ [mm]}$$

Hatásfok:

$$\eta_{fv} = \frac{1 + \cos \alpha_d}{2} = \frac{1 + \cos 15^\circ}{2} = 98,29\%$$

5.2. Szerkesztés

A 17. és 18. ábrán látható a méretezett kúpos fúvóka. A két változat közötti különbség csupán annyi, hogy a második esetben a kritikus keresztmetszet lekerekített.

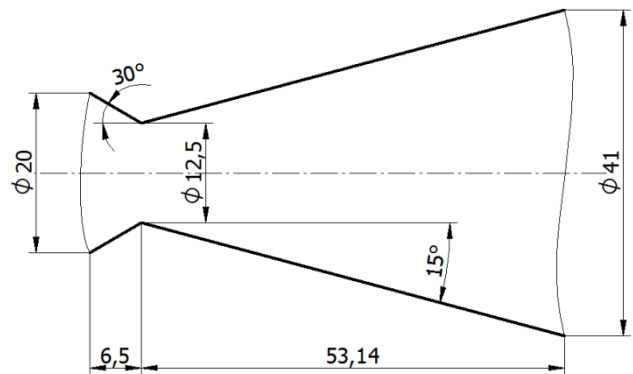
A szerkesztést Solid Edge-ben végeztem, és kisebb eltérések akadtak a méretekben, de ezek az eltérések nem jelentősek. A kritikus keresztmetszet lekerekítését a kiszámolt – ajánlott értéknek a felére vettem, így szembetűnőbbek a lekerekítésből fakadó méretváltozások.

Látható, hogy a jellemző átmérők és hosszúságok nem változtak a lekerekítésből adódóan, azonban a félkúpszögek igen. Különösen a konfúzor kúpszögénél jelentős a változás.

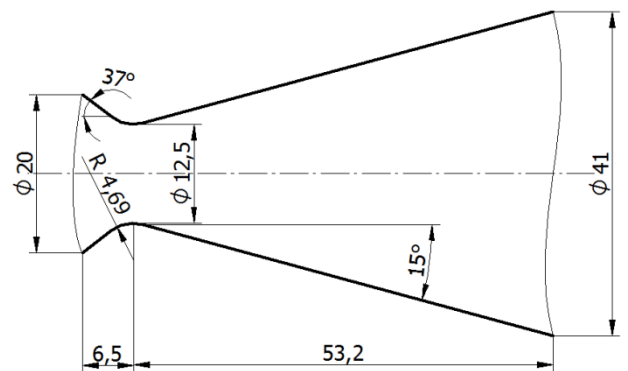
A meghatározott, kritikus keresztmetszettel arányos sugarú lekerekítés következtében ugyanis vagy a kúpszögeknek, vagy az átmérőknek kell változniuk.

Természetesen célszerűbb a félkúpszögeket változtatni, mivel ezeknek pár fokos eltérése kevésbé hat az áramlás jellegzetességeire (pl. áramlási sebesség), különösen, ha ez főleg a konfúzornál lép fel, mivel annak jellemzően nagyobb a félkúpszöge a diffúzorénál. Illetve a fizikai modellnél elmondottakkal összhangban, a konfúzor szerkezeti kialakítása kevésbé jelentős az áramlás jellemzőinek szempontjából.

Ez a kijelentés azonban pusztán spekuláció, és természetesen bizonyításra szorul.



17. ábra – Kúpos fúvóka lekerekítés nélkül



18. ábra – Kúpos fúvóka lekerekítéssel

6. Eredmények

A munkám eredménye a Laval-fúvóka fizikai és matematikai modelljének felállítása, és egy kúpos fúvóka méretezése, majd szerkesztése.

Ezek voltak a kezdeti célkitűzések, melyeknek eleget is tettem. Természetesen nem tudtam minden részre kitérőt tenni, de úgy gondolom sikerült a lényeget kiemelve a műszaki beállítottságú emberek számára érthetővé tenni a dolgozat témakörét.

Az elméleti alapoknál kitértem a matematikai modellben alkalmazott törvényszerűségek definiálására, illetve a magyar szakirodalomban található, Laval-fúvókával kapcsolatos témakörökre. Azokat a törvényszerűségeket, melyeket nem említettem külön, úgy véltem, az olvasó által ismertek.

Kezdetben a megvalósítást is szeretttük volna megoldani, majd lemérni az áramlás tényleges sebességét, de végül erre nem került sor, viszont a jövőben még lehetséges.

6.1. Következtetések

A dolgozatomban számos olyan dolgot hagytam ki, illetve hanyagoltam el, melynek figyelembe vétele jelentős hatással lehet a felállított modellre. A matematikai modell elején ezekről említést is tettem.

A munka továbbjavításának egyik lehetséges módja a különböző szerkezeti megoldások, illetve azok approximációinak kivizsgálása, és azok hatásainak bemutatása a működésére. Tehát a kúpos fúvókánál a kritikus keresztmetszet lekerekítésének mértéke, a harangszerűnél pedig még ezenkívül a parabola alakjának hatása.

Ugyanakkor tovább gazdagítaná a témakört a harangszerű és a kúpos fúvóka működésének összehasonlítása, amennyiben változtatjuk azok szerkezetét, belső érdekességét, vagy akár munkaközegét.

Ha már érdekesség, a természetesen a súrlódás is általánosítaná az ideális körülményekre definiált matematikai modellt, ahogy a hőcsere figyelembe vétele is újabb jelentős problémát

vetne fel. Az áramlás kétdimenziós vizsgálata szintén tovább bonyolítaná a problémát, hiszen jelentősen összetettebbé tenné a matematikai modellt.

A fűvókák legyártása, és működés közbeni jellemzőiknek kivizsgálása, valamint mérése is érdekes szempontja lehetne a továbbjavításnak illetve az eredmények bizonyításának.

Összefoglaló

Magyar

A szakdolgozatom témája a Laval-fúvóka matematikai leírása, mely magába foglalja az elméleti alapok lefektetését, valamint a fizikai és a matematikai modellen kívül egy tényleges fúvóka méretezését is. A modell felállítása után következő elemzés betekintést nyújt a fúvókában áramló levegő állapotjelzőinek a változásába, illetve alapot szolgáltat a méretezéshez. Mindez a megfelelő részletességgel felvonultatott elméleti alapokon nyugszik, és gyakorlatilag annak az összesített, és kibővített folytatását képezi, a kijelölt célok elérése érdekében.

Srpski

Tema mog diplomskog rada je Matematički opis Lavalove mlaznice, što obuhvata teorijske osnove za lako razumevanje, fizički i matematički model, i istovremeno dimenzionisanje jedne aktualne mlaznice. Ispostavljanje matematičkog modela prati analiza postignutih rezultata, što pruža uvid u promenu parametara stanja, i u dimenzionisanju. Sve ovo se zasniva na odgovarajućim, detaljno zapisanim teorijskim osnovama, i praktično predstavlja njen proširen nastavak, s ciljem da se postignu željeni rezultati.

English

The topic of my Bachelor's Degree thesis is the Mathematical Description of the Laval-nozzle, which includes the theoretical basics to make the thesis more understandable, as well as a physical and a mathematical model, and the design of an actual nozzle also. The analysis, which follows the results of the mathematical model, provides an insight into the variability of the gas parameters while it flows through the nozzle. These also lay the foundation for designing a nozzle. This is based, of course, on the appropriately detailed theoretical foundations, and is technically the extension of those, in order to reach the defined objectives.

Irodalom

- [1] Pattantyús Á. Géza (1959). Gyakorlati áramlástan. Harmadik, lényegesen átdolgozott kiadás. Tankönyvkiadó, Budapest.
- [2] Lajos Tamás (1992). Az áramlástan alapjai. Előadási jegyzet. Budapesti Műszaki Egyetem, Áramlástan Tanszék.
- [3] Nyers József (2005). Pneumatika. Szabadka, Műszaki Főiskola.
- [4] Kullman László, Felker Péter, Ruzinkó Endre, Kégl Tibor, Szlivka Ferenc (2012). Áramlástechnika. Egyetemi Tananyag. BME Gépészmérnöki Kar, Óbudai Egyetem, Bánki Donát Gépész-és Biztonságtechnikai Mérnöki Kar, SZIE Gépészmérnöki Kar.
- [5] Író Béla – Zsenák Ferenc (2012). Műszaki áramlástan II. (Kompresszibilis közegek). Széchenyi István Egyetem, Általános Gépészeti Tanszék.
- [6] Dieter K. Huzel, David H. Huang (1992). Modern Engineering for Design of Liquid-Propellant Rocket Engines

<http://www.grc.nasa.gov/WWW/k-12/airplane/conmo.html>

<http://www.grc.nasa.gov/WWW/k-12/airplane/isentrop.html>

<http://www.ivorbittle.co.uk/Books/Fluids%20book/Chapter%2013%20%20web%20docs/Chapter%2013%20Part%203%20Complete%20doc.htm>

<http://www.aerospaceweb.org/design/aerospike/nozzles.shtml>

http://soliton.ae.gatech.edu/people/jseitzma/classes/ae6450/bell_nozzle.pdf

<http://www.braeunig.us/space/propuls.htm>

<http://www.vilaglex.hu/Fizika/Html/>

<http://hu.wikipedia.org/wiki/Konf%C3%BAzor>

<http://www.nakka-rocketry.net/>

http://en.wikipedia.org/wiki/Bernoulli%27s_principle

http://en.wikipedia.org/wiki/Speed_of_sound