Permutációs játékok használata a függvények tanításában

Vajdasági Magyar Tudományos Diákköri Konferencia

Konferencia

Matematika Tanítás Módszertana

Szerző:

Torma Bence

matematika; technika-, életvitel- és gyakorlat osztatlan tanár

IV. évfolyam

Témavezető:

dr. Waldhauser Tamás

egyetemi docens

Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézet

2019

Tartalomjegyzék

Bevezető

A függvény a matematika egy gyakran használt fogalma, amelynek tanítása sokszor komoly kihívások elé állítja a tanárokat. Dolgozatunkban arra a kérdésre keressük a választ, hogy a permutációs játékok segítségével meg lehet-e könnyíteni a függvény fogalmának megértését az általános- és középiskolás tanulók számára. Röviden ismertetjük a függvény fogalma kialakulásának történetét, majd az iskolai tankönyvekben való megjelenéséről és fejlődéséről is írunk. Megemlítünk néhány jelentős magyar személyt, akik egy újabb megközelítését írták le a matematikatanításnak és -tanulásnak. Cikkekre hivatkozva elemezzük, hogy milyen problémák jelennek meg a függvény tanítása során, és milyen tévképzetek alakulhatnak ki a diákokban ebből a témából.

Céljaim között szerepelt, hogy kipróbálhassak néhány permutációs játékot diákokkal, amiken keresztül megtudhatom, hogy ez a csak egyetemen tanított témakör mennyire érthető egy közoktatásban tanuló diák számára. Továbbá, ha érthető, akkor mennyire könnyen tudják elsajátítani és használni ezt a tudást. Tervem szerint ez a játékos megközelítés segíti a „matematika-fóbia” leküzdését, és a permutációkon keresztül egy újabb megközelítését láthatják meg a tanulók a függvény értelmezésének, ezzel talán megkönnyítve a végtelen halmazokon definiált függvények bevezetését.

A kérdéseim megválaszolásához 14 különböző évfolyamú és tagozatú osztályban mutattam be a 15-ös játékot és kirakhatóságának feltételét. Az órákat igyekeztem jó hangulatúvá tenni és időt hagyni a felfedezésekre és az önálló ötletek meghallgatására, ezzel megfigyelve, hogy mennyire tetszik nekik a téma. A jókedv mellett fontosnak tartottam, hogy a tanóra eredményes is legyen, ezért a 15-ös játékról szóló órák végén minden osztály összes jelenlévő tanulójával egy tesztet töltettem ki. A tesztek eredményei és a tanulók reakciói biztatóak voltak. A kiosztott feladatokban a tanulók körülbelül 80%-a tudta a kezdőállást felírni ciklusok szorzataként.

A 15-ös játék után három különböző cserélgetős játékot játszottam 3 osztállyal. Az ezen játékok során szerzett tudást szerettem volna átvezetni a függvényekre, amire nem jutott elég időm, de az eddigi tapasztalatok nagyon biztatóak, tehát érdemes ezzel a témával tovább foglalkozni. A dolgozatban leírom a tanóra pontos menetét a sarkalatos pontokat megemlítve. A diákokat érdeklik a különböző játékok és szívesen játszanak velük. Sőt, az eredmények alapján komoly előkészületekkel elérhető, hogy a játék segítségével megértsék a függvények lényegét.

1. A függvény fogalma

A következő fejezetben először áttekintjük a függvényfogalom kialakulásának főbb lépéseit, a rá adott egyre pontosabb és részletesebb definíciókat. A történeti áttekintés során megemlítjük néhány fontosabb matematikus nevét is, illetve azt, hogy miként járult hozzá a mostani definíció meghatározásához. A történeti áttekintés után megnézzük, hogy miket ír elő a Nemzeti alaptanterv és kerettanterv a függvények tanításához; milyen fejlesztési területeket, feladatokat és kulcsfogalmakat határoz meg. Az 1.3. alfejezetben megnézzük a vizsgált témánk feldolgozását három, gimnázium 9. évfolyamára írott tankönyvben. A fejezet végén megemlítünk néhány problémát, amit a függvények tanítása során tapasztalhatunk. Kutatásokra hivatkozva összegezzük azt, hogy hogyan és mit kellene fejleszteni a függvények tanításában.

1.1. Történeti áttekintés

A függvény fogalmának pontos meghatározása nagyon hosszú időt ölel fel. A legismertebb matematikusok foglalkoztak ezzel a témával, különböző fogalmakat alkottak, sokszor egymást kiegészítve, sokszor pedig teljesen új gondolatmenetre építve. Erről a folyamatról Katz Sándor könyve (Katz 1989) és Szanyi Gyöngyi doktori értekezése (Szanyi 2017) alapján adunk egy rövid áttekintést. A függvény fogalmát sokáig két különböző mennyiség közötti kapcsolatra használták. Feltehető, hogy a kezdeti függvényfogalmat már az írás megjelenése előtt is használták (erre azonban nem lehet bizonyítékot találni, de minden jel erre utal). Már az ókori ember is gyakran találkozott a mai értelemben használt egyenes és fordított arányossággal. Minden nap tapasztalta, hogy több fáról több gyümölcsöt tudnak leszedni, és egy adott földterületet több munkás hamarabb művel meg.

Az ókorban már konkrét mennyiségek összetartozó értékeit táblázatokban jegyezték fel. Fennmaradtak például trigonometrikus függvények egyre pontosabb értékeit tartalmazó táblázatok. Kezdetben, amíg nem alakult ki egy egységes jelölésrendszer, addig szavakban rögzítették az összefüggéseket. Az egyre hosszabb szövegek elkerülése érdekében az ókorban és a középkorban felmerült az igény arra, hogy a műveleteket és az összefüggéseket megpróbálják rövidebben leírni. Ekkor kezdődött el a matematikai jelölések fejlődése. Az egyszerűbb kifejezések kialakításában nagy szerepe volt Viète-nek, és az ő ötleteit Descartes fejlesztette tovább; az általa megadott jelölések nagy része évszázadokig, sőt néhány jellegük a mai napig használatos. Descartes megfeleltetésekként gondolt a függvényekre; kortársa, Fermat pedig bevezette a változó mennyiségek fogalmát. Így már lehetséges volt egy betűkkel leírt összefüggésbe tetszőleges értékeket behelyettesíteni, megkapva annak értékét.

A XVII. század végére az algebrából, a geometriából és a mechanikából kialakult a matematika egy újabb ága, az analízis. Témái a kifejezések, görbék és mozgások vizsgálata, azaz a függvényekkel kapcsolatos problémák és összefüggések feltárása, azonban ekkor még nem létezett a függvény elnevezés, és pontos definíció sem volt még rá. A függvény (latinul „functio" – végrehajtás, eljárás) kifejezést először feltehetőleg Leibniz használhatta 1673-ban. Az analízis gyors fejlődése ellenére a függvénynek, mint fogalomnak még mindig nem volt pontos definíciója. Bernoulli és Euler analitikus kifejezésként határozta meg a függvényt és akkoriban még csak képlettel előállítható kifejezésekre használták ezt a fogalmat.

Euler később szabadon mozgó kéz által rajzolt görbeként is tekintett a függvényekre. Ez a definíció már megenged analitikus képletnél általánosabb szabályokkal leírható függvényeket is. Ezt a szabály fogalmat kezdték el ezután általánosítani, míg végül Dirichlet a következő definíciót mondta ki:

1.1. Definíció. Az y változó az x *függvénye*, ha minden x értékhez hozzátartozik y-nak egy pontosan meghatározott értéke és egyáltalán nem lényeges, hogy milyen módon történik a hozzárendelés.

Ezzel a meghatározással Dirichlet definíciója nemcsak egy adott szabály által meghatározott x-re és y-ra van kimondva, hanem tetszőleges x-hez kiválasztott tetszőleges y-ra. Ennek következtében kezdett el a fogalomalkotás eltolódni a „tetszőleges módon összetartozó értékek halmazának" irányba. A cél még mindig ugyanaz volt: a lehető legáltalánosabb függvényfogalom kimondása. A halmaz fogalmának kikristályosodása vezetett el a következő, Bourbaki által 1939-ben megfogalmazott definícióig.

1.2. Definíció. A *függvény* rendezett párok olyan halmaza, amely nem tartalmaz azonos első elemmel rendelkező párokat.

A közoktatásban leggyakrabban használt definíció egyfajta átmenetnek tekinthető Dirichlet és Bourbaki definíciója között.

1.3. Definíció. Ha az A halmaz minden eleméhez hozzárendeljük a B halmaz pontosan egy elemét, akkor ezt a hozzárendelést *függvénynek* nevezzük.

1.2. Függvények megjelenése a Nemzeti alaptantervben és a kerettantervben

A Nemzeti Alaptanterv átnézése előtt fontos megemlítenünk Varga Tamást, akinek a nevéhez köthető az 1963-ban induló komplex matematikatanítási kísérlet (Pálfalvi 2000). Ebben a fogalmak többszöri használatát (több feldolgozási, több értelmezési és több használati helyzet) hangsúlyozta. Nagy változást jelentett azonban, hogy a megszokottakkal ellentétben a matematika oktatását folyamatosnak és spirális felépítésűnek tervezte meg. Ennek az új módszernek a bevezetésével Varga Tamás szakítani akart az addigi módszerekkel, vagyis azzal, hogy a tanárok ismertetnek egy témát a tanulókkal, azt begyakorolják, majd számon kérik. Ennek oka, hogy a megszokott módszereknek köszönhető az, hogy a tanulók gyakran fordulnak a magolás, begyakorlás nem hatékony tanulási stratégiájához, ami egy idegen feladat megoldásánál nem elég. A komplex matematikatanítás módszere nagy hangsúlyt helyezett a felfedeztetéses és a problémamegoldáson alapuló tanítási stratégiára (Pintér 2013).

A Varga Tamás által kifejlesztett módszereket többek között Pálfalvi Józsefné is megőrizte. A függvényeket ő is játékgépként kezelte (Pálfalvi 2000). A *Matematika didaktikusan* könyvében kiemeli, hogy a függvénygépek használata során fontos, hogy a diákok önállóan jöjjenek rá az egyes bemenő és kijövő értékekből a gép szabályára. Az elsőre különbözőnek tűnő szabályok összehasonlítása lehetőséget nyújt a tanárnak, hogy az algebrai átalakításokat gyakoroltassa.

A 2012-es Nemzeti alaptantervben (NAT) [5] a matematika tantárgyra vonatkozó közműveltségi tartalmak részterületei minden évfolyamon többé-kevésbé megegyeznek a komplex matematikatanítás öt tantervi témakörével. Vessük össze a NAT és a komplex matematikatanítás részterületeit.

Komplex matematikatanítás	NAT
Halmazok, logika	Gondolkodási módszerek, halmazok, matematikai logika, kombinatorika, gráfok
Számtan, algebra	Számelmélet, algebra
Függvények, sorozatok	Geometria
Geometria, mérések	Függvények, az analízis elemei
Kombinatorika, valószínűségszámítás, statisztika	Statisztika, valószínűség
	Tudománytörténeti és matematikai érdekességek, neves matematikusok

Ez is mutatja, hogy a kísérletnek a spirális oktatásra vonatkozó része még mindig élő. Az öt megtartott elemen kívül megjelent minden korosztálynak egy hatodik is „Tudománytörténeti és matematikai érdekességek, neves matematikusok” címen. A következőkben azonban csak a „Függvények, az analízis elemei” ponttal fogunk foglalkozni.

Az iskolákban a függvény bevezetésénél megfigyelhetőek a fogalom történeti kialakulásának lépései. Az 1-4. évfolyamos diákok a függvényekkel még csak a saját mindennapjukban tapasztalt észrevételeiket jegyzik le, de már megjelenik a táblázatba foglalás is. Amikor legközelebb találkoznak a diákok a függvényekkel, akkor már el kell kezdődnie a fogalomalkotásnak. Ezt a folyamatot már az 5-8. évfolyamos korosztályra határozza meg a NAT. A diákok ebben a korban ismerkednek meg a koordináta-rendszerrel és a grafikonokkal. Megtanulják azokat értelmezni és elkészíteni őket a függvény értéktáblázatából. Megjelenik az egyenes arányosság ábrázolása is, és az alapvető függvénytulajdonságokat is megtanulják leolvasni az egyes grafikonokról (fogyás, növekedés, legnagyobb és legkisebb érték). Középiskolában a már általános iskolában megjelent speciális függvények mellett megjelenik néhány további is, és azoknak az ábrázolásai (például lineáris és másodfokú függvények, fordított arányosság, továbbá exponenciális, logaritmus-, trigonometrikus függvények). A alapfüggvényeken tanulniuk kell egyszerűbb transzformációkat is ($f(x)+c$, $f(x+c)$ és $c \cdot f(x)$ ábrázolása). A függvényeket itt már részletesen kell tudniuk jellemezni (értékkészlet, zérushely, szélsőérték, monotonitás, periodicitás leolvasása grafikonról).

Az Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet által meghatározott, az általános iskola 1-4. évfolyamára szánt kerettanterv szerint [2] 1. és 2. osztályban a fejlesztési célként többek között az összefüggéseket, szabályszerűségeket kell észrevenniük számsorokban a diákoknak. Kulcsfogalmak között szerepel a szabály és a kapcsolat is. 3. és 4. osztályban ezek az ismeretek kibővülnek azzal, hogy a szabály felismerése és folytatása mellett már hiányzó elemekkel is tudniuk kell a sorozatokat kiegészíteni. Megjelenik a táblázat használata és a grafikon adatainak leolvasása, és azoknak készítése is. Az általános iskola 5-8. évfolyamára kiadott kerettanterv [3] az 5. és 6. osztály tanulóinak a koordináta-rendszer használatára (pontok ábrázolása) fektet nagy hangsúlyt. A tanárnak fel kell keltenie a diákok figyelmét arra, hogy a mindennapi életben hol jelennek meg grafikonok. Fontos, hogy pontos és helyes függvényszemléletet alapozzanak meg a tanárok a diákokban, hiszen az itt megtanultakra kell építeniük a későbbi ismereteiket. A 7. és 8. osztályban már megjelenik a függvény definíciója is. A diákok ebben a korban már elkezdik a függvények ábrázolását is. Megjelennek kulcsfogalomként a következők: hozzárendelés, függvény, lineáris függvény, növekedés, fogyás, értelmezési tartomány, értékkészlet.

A gimnáziumok 9-12. évfolyama számára készített kerettanterv [4], a 9-10. évfolyamban tanulóknak 16 órát ír elő az „Összefüggések, függvények, sorozatok” témára. A fejlesztési követelmények között nagy szerepet kap az általános iskolában szerzett ismereteknek a felidézése. A valós életben tapasztalt összefüggéseket a diáknak modelleznie kell, elemezni, majd összevetni a valósággal. Újabb alapfüggvényeket (szinusz-, koszinusz-, tangens-, exponenciális és logaritmusfüggvény) tanulnak, amiket szintén meg kell tanulniuk ábrázolni, majd egyszerűbb transzformációkat végrehajtani velük, végül részletesen elemezni őket. A diákoknak fel kell ismerniük a lineáris és az exponenciális folyamatok közötti különbséget. A tanulókban a függvények megismerése és jellemzése során szerzett tudásuk alapján átfogó képnek kellett kialakulnia a függvénytulajdonságokról és azok felhasználhatóságáról a valós életben.

1.3. Függvények megjelenése három 9. évfolyamos tankönyvben

Ebben az alfejezetben röviden megvizsgálunk három, a gimnáziumok 9. évfolyamán használt matematika tankönyvet a függvények bevezetése, feldolgozása kapcsán.

Az első megvizsgált tankönyv a *Sokszínű matematika 9* (Kosztolányi, Kovács, Pintér, Urbán és Vincze 2017). A könyvre jellemző a típusfeladatok és az új fogalmak bevezetése példákon keresztül. Az azonosságokra gyakran mutat példát és sok hasznos információt ad a fontosabb fogalmakról. Ezek mellett a látvány elég *sokszínű* a rajzoknak köszönhetően. A függvény fogalmának bevezetése előtt először a derékszögű koordináta-rendszert és a ponthalmazokat ismétli át a tankönyv. A már általános iskolában tanult ismeretek felfrissítése után a könyv szerzői felvetnek egy példát, ahol egy a oldalú négyzet kerületét kell meghatározni. Ezen keresztül mutatják meg, hogy mit is jelent az egyértelmű hozzárendelés. A példa után olvashatjuk a függvény fogalmának meghatározását az 1.3. Definícióhoz hasonló megfogalmazásban, majd láthatunk még három példát megoldással a lineáris függvényekre. Ezek után ismerteti a lineáris függvény definícióját, végül hasonló felépítéssel jön a többi nevezetes függvény.

A következő könyv, amit bemutatunk az *Az érthető matematika* című tankönyv (Juhász, Orosz, Paróczay és Szászné 2016). Ebben a könyvben a témák sorrendjében is találunk különbséget. A halmazok, kombinatorika és algebra mellett itt egy geometriás rész is van a sokszögekről a függvények előtt. A függvényekről szóló fejezet első részében hegységek és hegycsúcsok között fogalmaz meg hozzárendelési szabályt. A könyv megemlíti az első részben az egyenes- és fordított arányosságot is, és hozzárendelési szabályok keresésével is foglalkozik. A következő alfejezetben már a függvényfogalom kialakulásáról ír a könyv. A történeti áttekintés után itt is példa következik, majd a definíció. A definíció után a könyv tesz egy fontos megjegyzést a függvényekről: leírja, hogy a hozzárendelések közül csak az egyértelműeket nevezzük függvénynek. A függvény fogalmának átismétlése és a jelölések rögzítése után a tankönyv átnézi újra a definíció előtti példákat. Megjegyzi, hogy a példákban szereplő összefüggések közül melyik függvény és melyik nem. Ezek után a tankönyv megemlíti a számpáros definíciót is. A függvényfogalom megtanulása után foglalkozik a könyv a koordináta-rendszerrel és az ábrázolással. Itt is először pontok meghatározására ad példákat, majd néhány függvényre.

Az Újgenerációs 9. évfolyamos tankönyv második kötetében szerepelnek a függvények (Barcza, Basa, Tamásné, Bálint, Kelemenné, Gyertyán és Hankó 2016). Ennek a könyvnek a felépítése jelentősen különbözik a korábbi két tankönyvtől. Az egyik legjelentősebb különbség az, hogy a függvények egy úgynevezett „Adatok és függvények" című fejezetben szerepelnek. A függvény fogalmának megemlítése előtt a tanulók átveszik az erre az évre szánt tudásanyagot statisztika témaköréből. Az ezzel foglalkozó négy alfejezet után kerül sor a derékszögű koordináta-rendszerre. A tankönyvben itt egy rövid elméleti rész van a rendezett számpárokról, majd grafikonelemzési feladatokat adnak meg. Ezek után jön a

„Grafikonok a mindennapokban” alfejezet, ahol még több példát láthatunk grafikonokra. A következő alfejezetben már pontok ábrázolása szerepel a bevezetőben, majd azonnal a függvény 1.3. Definíciója. A definíció megismerése után szerepel négy feladat, majd a házi feladatok. A következő alfejezetben ismét grafikonkészítés a feladat. A következőkben az egyenes- és fordított arányosság függvényével ismerkedhetnek meg a tanulók, majd az egyenes meredekségéről írnak a szerzők. Ezek után jön a NAT-ban előírt függvényeknek az ábrázolása, majd jellemzése.

A három könyv közül az elsőnek és másodiknak tárgyalt könyv felépítése jelentősen eltér a harmadiktól. Míg az első kettőben a függvényeket példán keresztül vezették be a szerzők, addig a harmadikban nagy hangsúlyt kapnak a grafikonok, sokkal több mindennapi példa szerepel benne, azonban gyakran ugrál a témák között.

1.4. Didaktikai kutatások a függvényfogalom tanításában

Dienes Zoltán volt az egyik legkiemelkedőbb magyar kutató, aki a matematikaoktatás fejlesztését vizsgálta, módszereit kipróbálta és leírta. Az *Építsük fel a matematikát* könyvében leírja milyen nagy szerepet kellene szánni a játékos felfedeztetésnek, az AHA-élmény jelentőségének (Dienes 1999). Dienes Zoltán a függvényeket gépekhez hasonlította, hiszen, ha egy gépnek betáplálunk egy szabályt, akkor minden bele dobható dologra ugyanazt a folyamatot fogja végrehajtani, és mi előre meg tudjuk mondani, hogy mit is fogunk visszakapni a gépből. Ezzel a képpel a függvény elvont fogalmát egy megfogható tárggyal azonosította.

A könyvben meggyőződéssel ír arról, hogy a függvényeket ugyanolyan természetes fogalommá lehet alakítani a diákok gondolkodásában, mint a legalapvetőbb fogalmainkat, mint például a ceruza vagy a könyv. Arra hivatkozott, hogy a számok fogalmát is azért tudja a gyerek megtanulni, megérteni, mert kiskora óta gyakran találkozik a különböző számokkal példákon keresztül. A függvény fogalmát ugyanígy kellene véleménye szerint tanítani. A diákoknak látniuk kell több feladatot is a függvényekről, hogy később könnyebben tudják felismerni és használni. A matematika és a függvények oktatásában nagy szerepe van annak, hogy egy adott diák egy bizonyos témát több feldolgozási, több értelmezési és több használati helyzetben lásson. Ha ezt a tanár biztosítani tudja a diákoknak, akkor a későbbi helyzetekben a diák sokkal előbb fogja felismerni a már megtanult ismereteket.

A fentieket Dienes Zoltán két elvben fogalmazza meg: a matematikai változatosság elvével és a perceptív változatosság elvével. A *matematikai változatosság elve* azt jelenti, hogy minden matematikai fogalomra olyan példákat adjunk, amelyekben csak azok a tulajdonságok közösek, amelyek valóban az adott fogalomhoz tartoznak. Például, hogyha nem akarjuk, hogy a tanulókban az a kép alakuljon ki, hogy minden függvény megadható képlettel, akkor mutassunk nekik olyan függvényeket is, amelyek nem írhatóak le képlettel. A *perceptív (észlelési) változatosság vagy többszörös konkretizálás elve* azt jelenti, hogy a diák minden példát (amelyet a matematikai változatosság elve alapján kiválasztottunk) sok, egymással lényegében megegyező, de különböző formában megadott alakban lássa. Például ugyanazt a függvényt adjuk meg értéktáblázattal, nyíldiagrammal, elempárok halmazaként stb. Pálfalvi Józsefné így ír erről a *Matematika didaktikusan* című könyvében (Pálfalvi 2000): „Az érett matematikai gondolkozás egyik legfőbb jellemzője az absztrakció magas foka: szemléleti tartalmukban nagyon különböző feladattípusok közös vonásainak felismerése, az absztrakt matematikai gondolat alkalmazása látszólag nagyon különböző esetekben”.

A fentiekkel összhangban van Tall és Vinner tanulmánya (Tall és Vinner 1981), ahol bevezették a „concept image” fogalmát, amit magyarra talán „fogalomképzetnek” fordíthatunk. Ezt a fogalmat egy definícióval kapcsolatos összes kognitív struktúrára szokták használni, azaz ez nem jelent mást, mint az adott fogalomról az egyén fejében élő kép, vagyis, hogy hogyan gondol arra a fogalomra, hogyan értelmezi azt. A matematikatanulásban gyakran megjelenik, hogy a tanulók fejében élő kép nem egyezik meg a helyes definícióval (még akkor sem, ha a diák tudja a helyes definíciót). Ezért fontos a jó fogalomalkotás, hogy a matematika tanulása közben ne alakuljon ki tévképzet és a fogalomképzet ne mondjon ellent az eredeti definíciónak. A szerzők pont a függvényfogalom tanítását hozzák fel példának: gyakran előfordul az, hogy a téma bevezetésénél még megjelennek a „véletlenszerű” hozzárendelések a tankönyvekben, de a későbbiekben a diákok csak képlettel, vagy grafikonnal megadott függvényeket látnak. Ez azt okozza, hogy szűkül a függvényről kialakult fogalomképzet a diákok fejében és nem tekintenek függvénynek olyan leképezéseket, amelyek nem képlettel vagy grafikonnal vannak megadva.

A. Sfard a (Sfard 1991) cikkben más megközelítésben építi fel a fogalmakat. Itt két különböző szintet említ meg a fogalomalkotásban:

1. „operational”: A fogalmat eljárásként, algoritmusként, tevékenységként, dinamiku-

san használom. A fogalom csak „potenciálisan” létezik számomra.

2. „structural”: A fogalomra, mint egy konkrét, „aktuálisan” létező, statikus objektumra gondolok.

A függvények tanulásában a következő módon jelenik meg ez a kétlépcsős folyamat. Kezdetben csak tudom, hogy egy x számból kaphatok egy $f(x)$ értéket, esetleg le tudom írni képlettel, szabállyal, de még nem gondolok az f függvényre önállóan létező entitásként. Később a „structural” szakaszban már a Bourbaki- féle defíníciót is tudom rá értelmezni, azaz véletlenszerűen párosított elemeket is függvénynek kezelek. Ez a folyamat megfigyelhető a matematika történetében is, ahogy azt az 1.1. alfejezetben leírtuk; a korai függvényfogalom az „operational” szintnek felel meg, a modern, halmazelméleti függvényfogalom pedig már a „structural” szintnek felel meg.

Sok felmérés készült a függvényfogalom tanításával kapcsolatban, amelyek alátámasztják a fenti elméleti meggondolásokat. A teljesség igénye nélkül összefoglaljuk néhány ilyen felmérés tapasztalatait.

Tanárjelöltek és néhány fiatalabb tanár között végzett felmérés során arra voltak kíváncsiak a (Vinner és Dreyfus 1989) cikk szerzői, hogy ki milyen definíciót ad a függvényre, majd néhány grafikonról kellett eldönteniük, hogy az függvény-e. Azt figyelték meg, hogy a definíció megadásánál a megkérdezetteknek csak a 27%-a adott a Dirichlet-Bourbaki definícióhoz hasonlót, és közülük is csak 56% használta az általa leírt definíciót a grafikonok vizsgálatánál. Ebből is azt feltételezhetjük, hogy még a tanárok és tanárjelöltek körében sem mindig teljesen érthető és világos, hogy mit nevezünk pontosan függvénynek, azaz a fogalom és a fogalomképzet között ellentét van.

A (Meel 1999) cikkben is hasonló tévképzetekről olvashatunk. Az ebben leírt kísérlet során a tanárszakos hallgatóknak először előre megadott definíciók közül kellett választani, majd saját maguknak kellett a függvényeket definiálni. Itt is meglepő módon a kitöltők többsége a legprecízebb és legáltalánosabb definíciót választotta, azonban a saját definíció leírásánál gyakran előfordultak képlettel megadott meghatározások is. Ehhez hasonló felmérést írnak le az (Even 1993) cikkben. Itt olyan helyzet elé állítják a tanárjelölteket a felmérést végzők, hogy adjanak egy olyan definíciót, amit mondanának a diáknak, ha nem érti a tanárjelölt által megadott első definíciót. Meglepő módon itt is gyakran jelent meg a képlettel vagy a grafikonnal történő meghatározás. Ennek természetesen az oka a szemléltetés is lehet, de a szerző egyértelmű véleménye, hogy ezt a tanárok fogalomképzetének hiányosságai okozták. A cikkben olvashatunk egy példát is arra, hogy a diákok mit gondolnak a függvényekről: a történetben Brian kap egy hozzárendelést, ami a racionális és az irracionális pontokon külön vannak definiálva, és azt kérdezik tőle, hogy ez függvény-e. Miután igennel válaszolt megkérték, hogy rajzolja le. Rajzolás közben azonban elbizonytalanodott abban, hogy valóban függvény-e az, amit lerajzolt.

Hasonló eredményeket tapasztaltak a (Clement 2001) tanulmányban is. Az egyik diák egy konstans függvény grafikonjára így reagált: „I guess by my definition it would be, but I don't think it is". Brian példájához hasonlóan ez az eset is jól illusztrálja a fogalom és a fogalomképzet közötti ellentmondást.

Összefoglalva, ezekből a tanulmányokból azt szűrhetjük le, hogy a függvényekkel kapcsolatos leggyakoribb tévképzetek a következőek:

- Minden függvény képlettel megadott összefüggés.
- A függvényt egyetlen szabállyal kell megadni (ha esetszétválasztással van definiálva, akkor az nem egy függvény, hanem több).
- A függvény grafikonja folytonos (például az egészrész az nem függvény).
- A függvénynek injektívnek kell lennie.
- Ha x változik, akkor $f(x)$-nek is változnia kell, speciálisan a konstans függvény nem függvény.

Amint azt már a (Tall és Vinner 1981) cikknél említettük, a fenti problémák egyik fő oka a Dienes Zoltán által megfogalmazott matematikai változatosság hiánya, vagyis, hogy az iskolai tananyagban csak néhány példát látnak „nem szabályos" függvényre, és utána már csak képlettel és grafikonnal megadott leképezésekkel foglalkoznak. Ez okozza a fogalomképzet szűkülését. A (Clement 2001) cikk szerzője sajnálattal jegyzi meg, hogy „We never discussed deeply the definition of function, the different ways to represent functions, and the connections between the two".

A (Steketee és Scher 2012) cikkben pedig a perceptív változatosság elvének fontosságát hangsúlyozzák. Kiemelik, hogy fontos a függvények megadása különböző reprezentációban, és az, hogy a diákok tudjanak közöttük váltogatni is. Ezzel elkerülhetjük a függvény fogalomképzetének leszűkülését, és ezzel a tévképzetek kialakulását.

A cél tehát egyértelműen látszik az előzőekből. Egy fogalomszűkítés nélküli, „structural” szintet szeretnénk elérni a függvények tanításában is. Hogyan lehetséges ez? A matematikai változatosság elve szerint a függvény fogalmának kialakításához fontos, hogy ne csak valós függvényekről legyen szó az órákon, hanem diszkrét függvényekről is, és a perceptív változatosság elvének megfelelően ezeket a függvényeket sokféle reprezentációban mutassuk meg a diákoknak. A diszkrét függvények kiemelt fontossággal bírnak a mai világban. Hol használnak diszkrét függvényeket? Többek között kiemelhetjük a számítógépek működési elvét, hiszen minden számítógép lényegében a $\{0, 1\}$ halmazon értelmezett (többváltozós) függvényekkel dolgozik. Ugyancsak időszerű téma a titkosítás is, ami szintén véges halmazokon értelmezett függvényekkel írható le.

A dolgozat fő célja annak megmutatása, hogy a függvények tanításával kapcsolatos fentebb felvetett problémákra a permutációk egy megoldási lehetőséget biztosítanak. A permutációkról elmondható, hogy

- sokféle reprezentációban meg lehet őket adni;
- szabálytalanok, véletlenszerűek is lehetnek, mégis jelentéssel bírnak (például egy permutációs játék kezdőállásaként);
- nem képlettel vannak megadva;
- diszkrét függvények;
- végesek, így az egész függvényt kompakt formában tudjuk leírni vagy ábrázolni (nem csak néhány értéket vagy pontot).

A (Sfard 1991) cikkben olvashatjuk, hogy egy fogalom megszilárdításához (a „structural ” szint eléréséhez) szükséges, hogy már az „operational” szakaszban is magasabb szintű feladatokban is használjuk az adott fogalmat. A szerző éppen a függvényeket hozza erre pélának: „in order to see a function as an object, one must try to manipulate it as a whole: there is no reason to turn process into object unless we have some higher-level processes performed on this simpler process”. Ennek fényében hasznosnak tűnik a függvényekkel már bevezetésüktől kezdve magasabb szintű feladatokat is végezni. Egy ilyen lehetséges magasabb szintű feladat az összetett függvények képzése (a jelenlegi tantervben ez csak 12. osztályban és ott is csak emelt szinten kerül elő).

A dolgozatban a függvény fogalmához tartozó tévképzetek megszüntetésének és a fogalomszűkülés elkerülésének céljából írjuk le a permutációk játékos, dinamikus, változatos feldolgozását, amin keresztül már általános iskolásoknak is be lehet mutatni az összetett függvény fogalmát, ezzel segítve a függvényfogalom kialakítását és elmélyítését.

2. A 15-ös játék

Permutációs játékoknak nevezzük azokat a játékokat, amelyekben adott lépések segítségével kell bizonyos elemeket (például kockákat vagy számokat) egy véletlenszerű kezdőállásból kiindulva egy meghatározott alapállásba juttatni (például számokat növekvő sorba rendezni). Ilyen játék az ebben a fejezetben tárgyalt 15-ös játék is, de többek között a Rubik-kocka is.

A 15-ös játékhoz szükségünk van egy fa keretre, amibe behelyezünk 15 fakockát 4 sorba és 4 oszlopba úgy, hogy a jobb alsó sarok üresen maradjon. A kockák a bal felső saroktól kezdve, soronként haladva be vannak számozva 1-től 15-ig. Ezt nevezzük alapállásnak (1. ábra). A játék elején kiöntjük a kockákat a keretből, majd véletlenszerűen visszahelyezzük. A kirakást tologatásokkal kell végezni, azaz mindig az üres mezőre kell egy szomszédos kockát csúsztatni. A játék lényege, hogy szabályos lépésekkel a kockákat visszahelyezzük az alapállásba.

1. ábra. Alapállás

2.1. A kirakhatóság vizsgálata elemi megfigyelésekkel

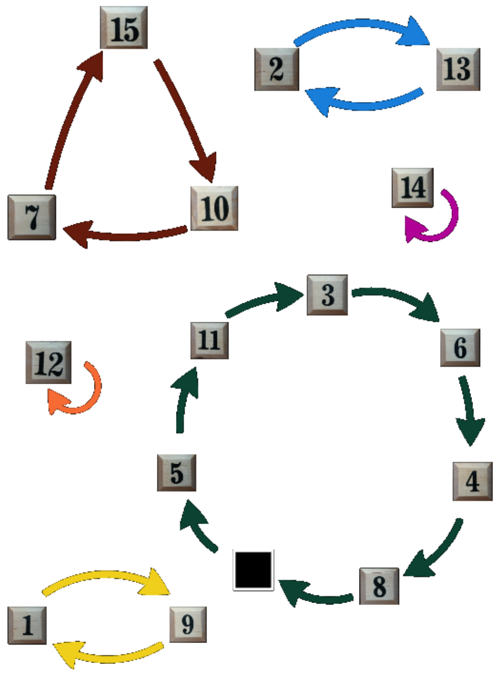
A 15-14-es feladvány megoldhatatlanságának bizonyításához egyszerű megfigyelésekre, szabályszerűségek észrevételére van szükség. Az első megfigyelésünket a tábla sakktáblamintájúra való színezése után jegyezhetjük fel. A sakktáblaszínezés módszere az általános- és középiskolás versenyfeladatok gyakori megoldási stratégiája (Pintér 1993.; Katz 2010). A lényege, hogy a tábla hátulját feketére és fehérre színezzük úgy, hogy minden egyes kis kocka alatt egy szín legyen, és a szomszédos kockák alatt az ellenkező szín szerepeljen. Így mindig csak egy színt látunk, éspedig azt, amelyik felett nincs kocka, azaz, ahol az üres mező van. Észrevehetjük, hogy minden egyes kocka áttolásával az egyik szomszédos mező válik üressé, tehát a háttér színe is változik: feketéből fehér lesz és fordítva, fehérből fekete.

Mi is a célunk? Azt szeretnénk, ha minden kocka a helyére kerülne. Rajzoljunk tehát minden kockából arra a helyre mutató képzeletbeli nyilat, ahova kerülnie kell (2. ábra). Ezeket a képzeletbeli nyilakat követve észrevehetjük, hogy kialakulnak bizonyos ciklusok, mégpedig úgy, hogy egy kockából kiindulva követjük a nyilakat, míg vissza nem érünk a kiinduló kockához. Ezek után ki kell indulnunk ugyanezzel a módszerrel egy eddig nem szereplő kockából, addig, amíg van olyan kocka, amit nem használtunk fel (3). ábra).

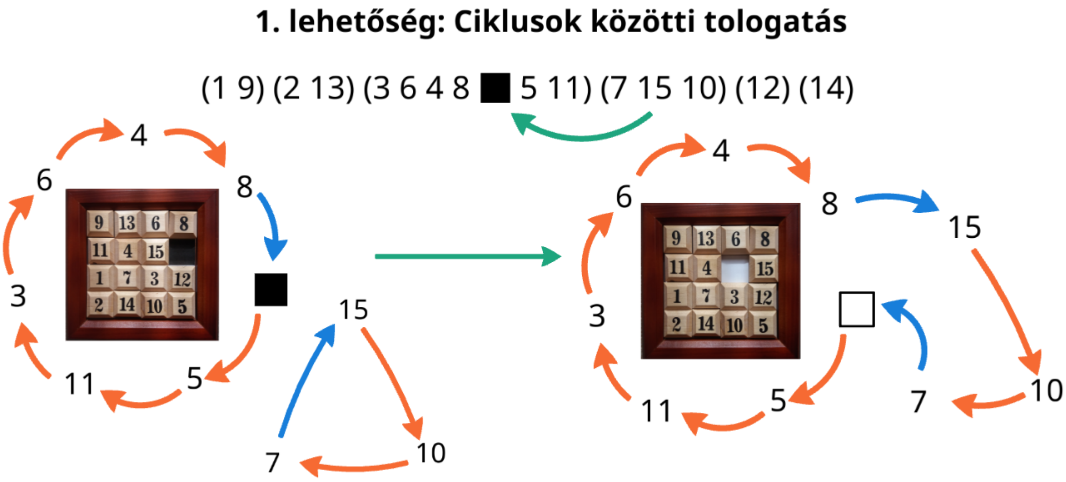
2. ábra. Melyik kockának hova kell kerülnie?

Ezek a ciklusok azonban minden egyes eltolás után változnak, de csak az a legfeljebb kettő ciklus, amelyikben az a kocka van, amelyiket áttoljuk és az, amelyikben az üres mező van. A többi ciklus értelemszerűen nem változik, hiszen az elemeik a helyükön maradnak. Így tehát elegendő két esetet vizsgálni aszerint, hogy az eltolt kocka és az üres mező ugyanabban a ciklusban vannak, vagy pedig különbözőben. Hogyan változnak a ciklusok?

Nézzünk egy példát a 4. ábra alapján, amikor a 15-ös kockát toljuk át az üres mező helyére. Ekkor eredetileg a 8-asból mutatott nyíl az üres mezőre, mert az foglalta el a helyét, és a 7-es kocka helyét foglalta el a 15-ös kocka. Az áttolás után azonban már a 15-ös kocka került a 8-as helyére és az üres a 7-esére. Mivel a 15-ös és az üres mező helyét



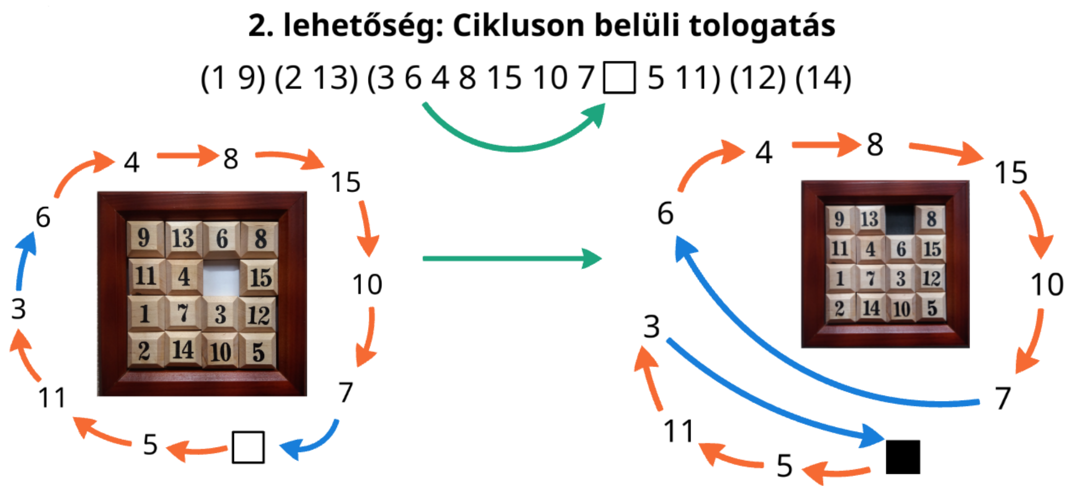
3. ábra. Ciklusok felírása



4. ábra. Ciklusok összeolvadása

még mindig ugyanazok a számok foglalják el, így ezek a nyilak nem változnak csak a 7-esből és a 8-asból kiinduló. Így kaptunk két ciklusból egyet. A másik esetet az 5. ábrán láthatjuk. Itt is az előzőhöz hasonló módon lesz egy ciklusból kettő.

Fontos megfigyelnünk, hogy a ciklusok száma minden eltolással pontosan eggyel változik. Az első esetben minden ciklus megmarad, csak egy ciklus fog változni, az amelyik



5. ábra. Ciklus szétesése

szétesik két részre, ezzel a ciklusok száma eggyel nő. A második esetben viszont a két ciklusból egy lesz, szóval a ciklusok száma eggyel csökken.

Érdemes összevetni az eddig észrevételeket: a sakktáblaszínezést és a ciklusok számának változását. Láthatjuk, hogy az üres mező háttere felváltva fekete és fehér, és a ciklusok száma is felváltva páros és páratlan. Ebből következik, hogy a szín és a paritás között egy állandó kapcsolat van az egész játék alatt. Tegyük fel, hogy az eredeti tábla hátulját úgy színeztük ki, hogy az alapállásban az üres mező helyén fekete szín van. Ez esetben a kirakott álláshoz páros számú ciklus (16) tartozik, hiszen minden kockából önmagába mutat a nyíl. A 15-14-es állásban ugyanúgy a fekete mező az üres, viszont itt eggyel kevesebb, azaz 15 ciklus van, mert két szám (14 és 15) fel van cserélve. Tehát ebből az állásból csak olyan helyzeteket tudunk elérni, ahol a fekete színhez páratlan számú ciklus tartozik. Így az alapállásba sohasem juthatunk el.

3. Cserélgetős játékok

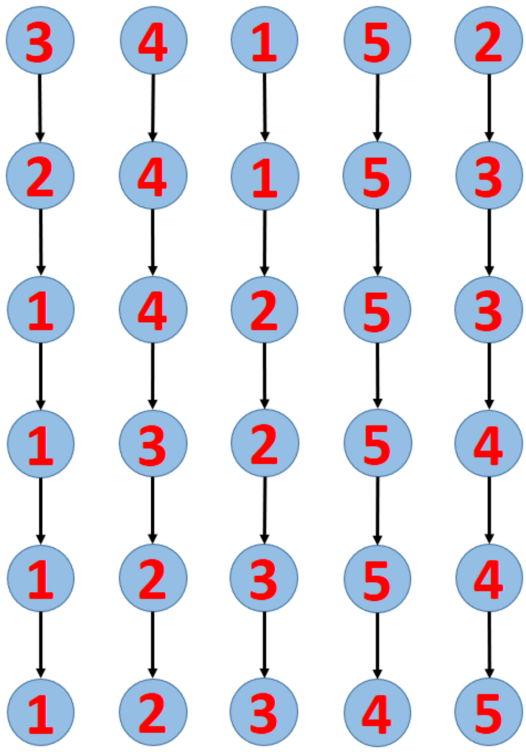
Egy újabb permutációs játékot kapunk, ha a 15-ös játékban megengedjük azt, hogy ki lehessen venni a kockákat és így is meg lehessen cserélni két számot. Ebben az esetben a táblának nincsen szerepe. Nyugodtan elképzelhetjük azt, hogy a 16 számot kivesszük a táblából és sorfolytonosan leírjuk őket. Így természetesen egy sokkal egyszerűbb játékot kapunk. Ebben fejezetben egyben fogjuk tárgyalni azokat a részeket, amiket a tanórákon szükséges lenne elmondani, és a játékok matematikai hátterét, amit a tanárnak ismernie kellene. (Azt, hogy erről a tanár mennyire részletesen szeretne beszélni, arról a rendelkezésére álló idő dönt. Mi egy 45 perces tanóra keretein belül mutattuk be más tartalmakkal együtt ezeket a játékokat (lásd az óratervet a függelékben).)

3.1. Szomszédos értékű számok cseréje

Ebben a játékban értékszomszédos számokat kell kicserélni. Az értékszomszédos kifejezés szemléletesen azt jelenti, hogy magunk elé képzeljünk a számegyenest, úgy, hogy jelöljük rajta 1-től n-ig a pozitív egész számokat. Az itt egymás mellé képzelt számok értékszomszédosak (például 2-nek az 1 és a 3, de 1-nek csak a 2 az értékszomszédos párja).

Néhány játék után azonban ennél a játéknál is rájöhetünk egy egyszerű stratégiára. Célszerű itt is az 1-es számot először a helyére vinni. A kérdés, hogy hogyan. Mivel csak a 2-es szám értékszomszédos az 1-gyel, így azt kell elérni, hogy az 1-es helyén (feltéve, hogy alapból nincsen ott) a 2-es szerepeljen. Ha nem a 2-es van ott, akkor a 3-ast kell odavinni, és így tovább, egyre csökkentve az első helyen lévő szám értékét, míg végül az az 1-es nem lesz. Ezek után ugyanezt a módszert alkalmazzuk a 2-es számra, majd a többire (6. ábra). A kirakási stratégia után ismét felmerül a kérdés, hogy vajon az optimális stratégiát találtuk-e meg?

A minimális lépésszám meghatározásához az állásokat nyíldiagramokkal fogjuk ábrázolni (de másfajta diagramokkal, mint a 15-ös játéknál). Legyenek egy tetszőleges kezdőállásban szereplő számok sorra $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Írjuk le 1-től n-ig a számokat növekvő sorrendben kétszer egymás alá. Ezek után a felső sorból az i számot kössük össze egyenes nyíllal az alsó sorban szereplő azon j számmal, amelyre teljesül, hogy $a_j = i$ (8. ábra bal oldala). Így keletkezni fognak metszéspontok. Most számoljuk meg ezeket. Azokban az esetekben, amikor k darab nyíl metszi egymást ugyanabban a pontban, akkor vagy



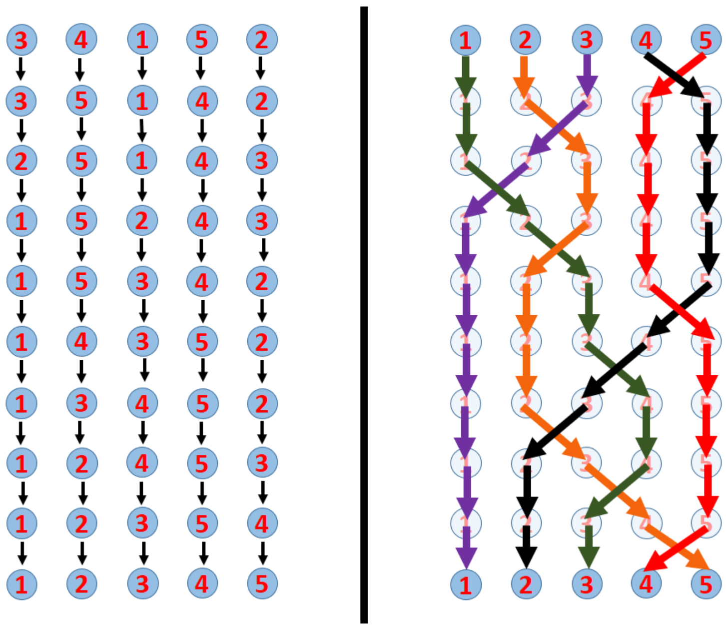
6. ábra. Szomszédos értékű számok cseréje

görbítsük el kicsit a nyilakat, hogy mindig csak kettő messe egymást egy pontban, vagy egyszerűen annyi metszéspontnak számoljuk, ahány nyílpár metszi egymást (k nyíl esetén $\binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2}$).

3.1. Tétel. *A minimális lépésszám egy tetszőleges kezdőállásból a fenti módszerrel keletkező metszéspontok számával egyenlő.*

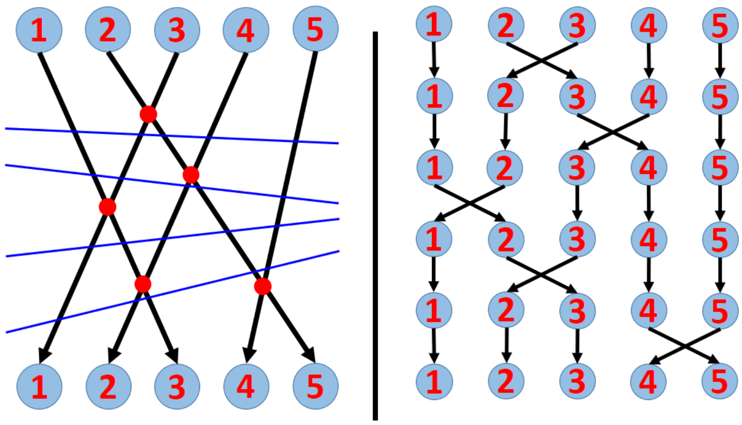
Bizonyítás. A minimális lépésszám meghatározásához nézzünk egy példát. A 7. ábra szerint kiraktuk a játékot (de nem a korábban leírt stratégiát követtük). A bal oldali ábrán a nyilak jelzik, hogy melyik szám helyére melyik került, a jobb oldali ábrán pedig ugyanez az ábra van felrajzolva, csak a számokat most itt növekvő sorrendben írtuk le. Fontos megjegyezni, hogy csak a számok sorrendjén változtattunk, minden sorban a nyilak helyzete megegyezik az eredeti felrajzolással, azaz minden jobb oldali nyíl kiindulási pontján szereplő és a másik végén elhelyezkedő szám azonos a bal oldali ábrán ugyanehhez a nyílhoz tartozó két számmal. Az így generált jobb oldali ábrán megfigyelhetjük, hogy minden sorban három nyíl megy ugyanabba a számba, mint amiből kiindul, és kettő metszi egymást, méghozzá két szomszédos nyíl, ami nem véletlen, mert a játék szabálya szerint értékszomszédos számokat kell megcserélni. Az ábrán észrevehetjük, hogy annyi lépés van, ahány keresztező nyíl, vagyis ahány metszéspont. A minimális lépésszámhoz tehát minimalizálnunk kell a metszéspontok számát.

A játék során bármilyen lépéseket hajtottunk is végre, egy adott számból kiindulva a nyilak mindig ugyanoda vezetnek (a 7. ábrán szereplő példánál az 1-esből a 3-asba, a 2-esből az 5-ösbe stb.), mert ezt a kezdő- és végállás határozza meg. Az általunk választott lépések csak azt befolyásolják, hogy hogyan kanyarog a nyílsorozat az 1-esből a 3-asba, a 2-esből az 5-ösbe, és így tovább. Megfigyelhetjük, hogy az ábrán szereplő esetben a 4-es és az 5-ös számot megcseréltük az első és az ötödik lépésben is, és az ötödik csere után ugyanúgy balról van a fekete nyíl és jobbról a piros, mint az első csere előtt. Az ilyen plusz lépéseket zárhatjuk ki, ha a nyilakat egyenesen húzzuk be a kiindulási számokból a végső számokba. Az így keletkezett metszéspontok számánál kevesebb lépésből nem tudjuk ezek szerint kirakni a játékot. Azonban ennyivel biztosan ki lehet rakni. Erre egy eljárás, ha a metszéspontos ábrát vízszintes egyenesekkel felbontjuk úgy, hogy minden részben egy metszéspont legyen. Ekkor ezekről leolvasható fentről lefelé, hogy melyik sorban hanyadik nyilakat, azaz melyik számokat kell megcserélnünk ahhoz, hogy kirakjuk a játékot. Egy ilyen felosztás szerepel a 8. ábrán. ■



7. ábra. Egy lehetséges kirakás

A bizonyításban vázolt módszer a minimális lépésszámú megoldás megtalálására nem feltétlen egyezik meg az általunk ismertetett stratégiával (például a 8. ábráról más lépés-sorozatot olvashatunk le, mint a 6. ábráról), viszont ha a mi stratégiánk szerinti kirakást is



8. ábra. Minimális lépésszám meghatározása

lerajzoljuk a bizonyításban leírt módon, akkor ott sem lesznek „felesleges” metszéspontok, tehát a mi stratégiánk is a lehető legkevesebb lépést használja.

4. Permutációk a függvények tanításában

Az 1. fejezetben láthattuk a függvényfogalom bevezetésének lehetőségeit. Az azt követő fejezetekben megismertünk néhány cserélgetős játékot, amik segítségével meg szeretnék támogatni a diákokban kialakult fogalmat a függvényekről. Ebben a fejezetben az eddigi tapasztalatainkat összegezzük, részletesen leírva a tanórák menetét, majd kitérünk a további terveinkre is.

4.1. A megtartott órák tapasztalatai

A korábban leírtaknak egy részét már a gyakorlatban is kipróbáltam. Ezeknek a tanóráknak a tapasztalatait foglalom össze ebben az alfejezetben; az órák foglalkozástervei megtalálhatóak a függelékben.

A permutációk témakörét először a 15-ös játék keretein belül mutattam be 14 különböző évfolyamú és tagozatú osztályban (a szegedi Juhász Gyula Gyakorló Általános Iskolában 5., 6., 7. és 8. évfolyamon, és a szegedi Deák Ferenc Gimnáziumban 9., 10. és 11. évfolyamon) úgy, hogy a függvényekről, sorbarendezésekről csak a játék kirakhatóságának vizsgálatához szükséges szintig beszéltem. Fel szerettem volna mérni, hogy mennyire tudják elsajátítani és megérteni azt, hogy hogyan kell egy adott állást ciklusokra felbontani. Az órát igyekeztem játékosan kezelni. Nagy hangsúlyt fektettem arra, hogy a diákok megpróbálhassák kirakni a játékot. Az óra folyamán bemutattam a diákoknak a 15-ös játék eredetének történetét és a kirakás során gyakran megjelenő problémáról is beszéltem nekik. A probléma ismertetése után megmutattam nekik, hogy a ciklusok felírása után milyen könnyen meg lehet határozni egy állásról, hogy kirakható-e onnan a játék, vagy nem. Ehhez az általam készített [1] prezentációt használtam. A tanulóktól az óra közben is érkeztek pozitív visszacsatolások arról, hogy mennyire tetszik nekik a játék.

A jókedv mellett fontosnak tartottam, hogy a tanóra eredményes is legyen, ezért a 15-ös játékról szóló órák végén minden osztály összes jelenlévő tanulójával egy tesztet töltettem ki. A tesztek eredményei biztatóak voltak. A kiosztott feladatokban a tanulók körülbelül 80%-a tudta a kezdőállást idegen ciklusokra bontani. Megkértem őket, hogy ha van kedvük, írjanak az óráról megjegyzéseket, és többen írtak is. Gyakran előfordult olyan szöveg, hogy a diákoknak annyira tetszett a játék, hogy szívesen játszanának legközelebb is vele. Volt olyan, aki azt írta, hogy örül, hogy egy újabb játékot tanulhatott meg, és olyan is akadt, aki azt írta, hogy szívesen részt venne még ilyen órán. A legnagyobb örömöt az a gimnazista osztály nyújtotta, akik az órájuk után az ebédszünetük helyett bent maradtak az osztályteremben, és játszani akartak még a játékkal és több felmerülő kérdésüket is feltették. A kitöltött feladatlapok eredményeit a függelékben található táblázat tartalmazza.

A meglepően sok helyes kitöltés és a többségében pozitív visszajelzések miatt vágtam bele a következő óra felépítésébe és témájának megtervezésébe. A 15-ös játék után egy újabb cserélgetős játékokkal készültem. Még csak három általános iskolai osztályba volt szerencsém ezzel eljutni (kettő 7. és egy 8. osztály), de a tapasztalatok nagyon hasznosak voltak a későbbiekhez. Tudnunk kell, hogy a 7. osztályosok akkor még nem tanulták a függvény definícióját, a 8. osztályos tanulók már igen. Az órára három cserélgetős játék kipróbálását, egy megoldás eljátszását és általánosítást terveztem be. Egy előre megadott számsorban kellett a számokat a helyükre rendezni. A diákok a füzetükben írták a lépéseiket, de a legbátrabbak az interaktív tábla segítségével is megpróbálhatták kirakni a játékot.

A 3.1. fejezetben tárgyalt feladattípus kirakásához a függelékben található lapot osztottam ki a diákoknak, és megkértem őket, hogy az ábra bal oldalára írják a megoldásaikat. Miután megoldották a feladatot egyeztettük, hogy kinek hány lépésből jött ki a megoldás. A válaszok eltérőek voltak: volt, aki 5-öt mondott, de a 7-es és a 9-es számok is elhangoztak. Az eltérő eredmények után felmerült bennünk a kérdés, hogy ki lehet-e rakni a játékot 5 lépéstől kevesebből. Ennek kiderítése érdekében megkértem őket, hogy másolják át a nyilakat a lap jobb oldalára (ezzel manuális munkával gyakorolták a reprezentációk közötti váltogatást). Az átmásolás után vontuk le azt a következtetést, hogy mindenkinek ugyanabból a számból ugyanabba a számba mutat minden nyílsorozat (a 7. ábrán szereplő példánál az 1-esből a 3-asba, a 2-esből az 5-ösbe stb.). Megfigyeltük, hogy keletkezhettek felesleges metszéspontok (kivéve azoknál, akiknek 5 lépésből sikerült). Ezután vontuk le azt a következtetés, hogy egyenes nyilakat behúzva elkerülhettük volna a felesleges metszéspontokat (lépéseket). A 8. ábrának a bal oldalán látható bevonalazott ábráról a lépéseket felírtuk az ábra jobb oldalán látható módon. A megoldás helyességét „emberi erőforrással" vizsgáltuk meg. A kirakás mindegyik lépéséhez kihívtam egy tanulót, és egy papírlapon odaadtam neki a 8. ábra megfelelő lépését. A gyerekek egymás mellé álltak, én az első diák fülébe súgtam egy számot, ő a saját lapján lévő függvény által adott értéket súgta a következő tanuló fülébe, és így tovább. Az 5. diák által kimondott szám nem más volt, mint az 5 függvény kompozíciójának értéke az általam mondott helyen. Ezzel tehát a kompozíciót is megvalósítottuk.

A megoldás ellenőrzése után egy újabb diákot kértem meg, hogy vegye fel egy függvénygép szerepét. Meglepő módon több diák is lelkesen jelentkezett ennek a szerepnek a betöltésére. A kihívott diáknak (nevezzük Ferinek) elmagyaráztam röviden egy ilyen gép működését és a feladatát, továbbá megkértem, hogy a műveletet, amit végre kell hajtania azt ne árulja el a többieknek (a kezébe adtam egy lapot, amire az volt írva, hogy $F(x) = 2x$). Ezután megkértem az osztálytársait, hogy ők mondjanak neki számokat. A kapott számokra Feri rendre jól végezte el az adott műveletet, és az osztály többi tagja gyorsan ki tudta találni a gép működését, azaz az F függvényt. Az osztályok annyira lelkesedtek ezért a játékért, hogy az összetett-függvénygépeket is ki tudtuk velük próbálni. Kihívtam egy másik diákot (nevezzük Gabinak), és az ő kezébe egy $G(x) = x + 1$ feliratú lapot adtam. Az ő függvényének a szabályát is gyorsan kitalálta az osztály. Ezután a fent leírt „fülbesugdosós" módszerrel működtettük a $G \circ F$ gépet. Néhány érték meghatározása után a tanulók felismerték, hogy ez az $x \mapsto 2x + 1$ függvény, amit aztán ellenőriztünk is:

$$(G \circ F)(x) = G(F(x)) = G(2x) = 2x + 1.$$

Ezután Feri és Gabi helyet cserélt, és először néhány értéken kipróbálva észrevettük, majd képlettel is felírtuk, hogy

$$(F \circ G)(x) = F(G(x)) = F(x + 1) = 2(x + 1) = 2x + 2.$$

Ezután megfigyeltük, hogy $G \circ F \neq F \circ G$, és felhívtam a figyelmet a fenti számolásban a zárójelfelbontás fontosságára. A 8. osztályban ezután maradt még egy kis idő, ezért megkérdeztem a diákokat, hogy szeretnének-e még egy ilyen függvénygépes játékot. Az egybehangzó „IGEN!" válasz után eljátszottuk az $F(x) = 2x + 3$ és a $G(x) = 3x - 2$ függvények kompozícióját mindkét sorrendben. Az óra végén többen is mondták, hogy remélik, hogy megyek még, és lesz még ilyen órájuk.

4.2. További tervek

A megtartott órák pozitív tapasztalatai alapján szeretnék még további hasonlóan játékos órákat tartani a függvényekről. A fenti függvénykompozíciós játék egy természetes folytatásaként lehetne a következő típusú feladatokat venni:

4.1. Feladat. Adott $f(x) = 2x + 2$ függvény esetén milyen g függvényre igaz az, hogy $(f \circ g)(x) = 6x + 4$?

4.2. Feladat. Adott $g(x) = 3x + 1$ függvény esetén milyen f függvényre igaz az, hogy $(f \circ g)(x) = 6x + 4$?

Ilyen típusú feladatokkal be lehet vezetni az inverz függvény fogalmát is.

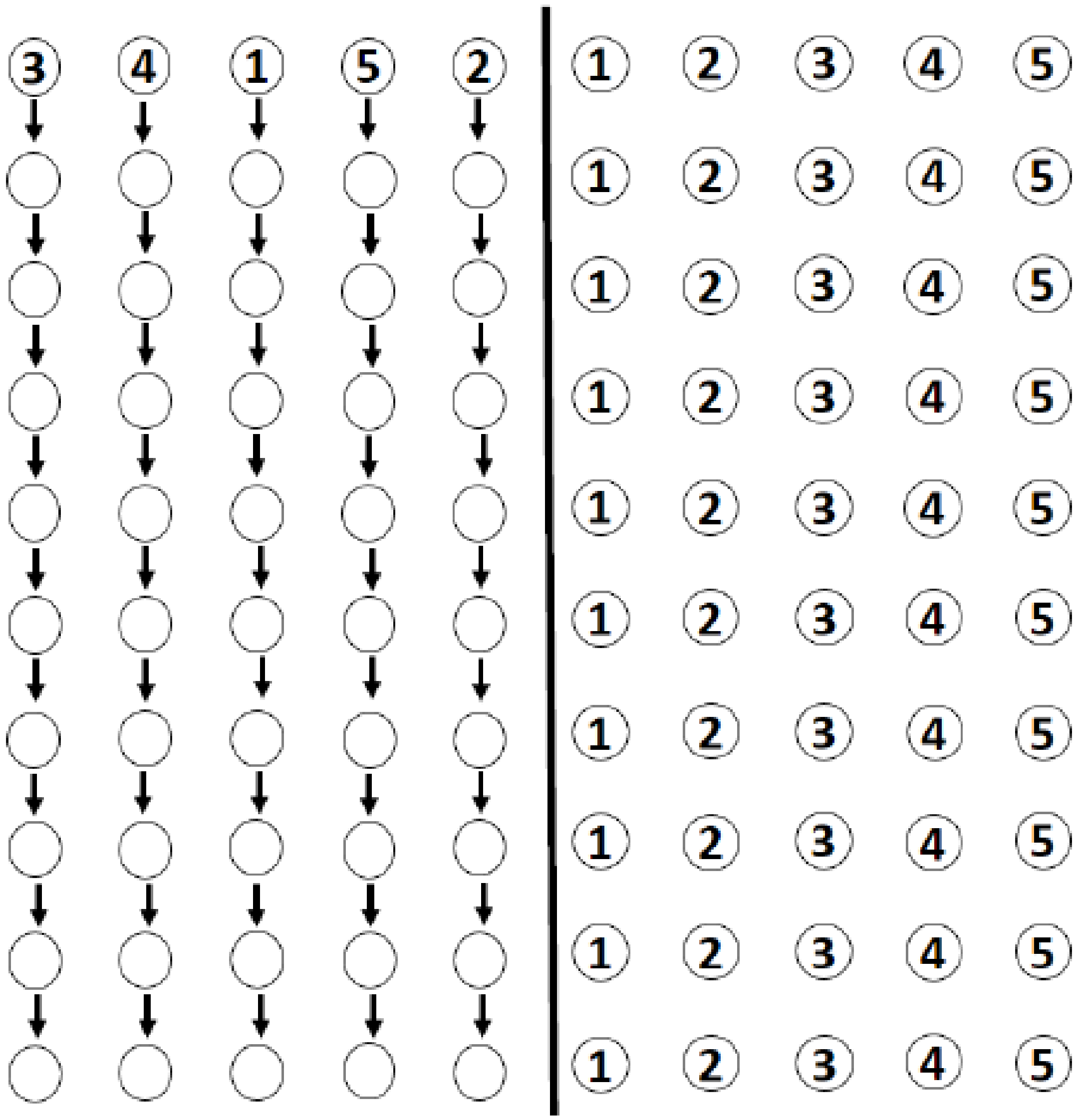
4.3. Feladat. Adott $f(x) = 2x + 2$ függvény esetén milyen g függvényre igaz az, hogy $(f \circ g)(x) = x$?

Ezek a feladatok jóval nehezebbek, mint azok, amiket az órán megoldottunk, de bízom benne, hogy megfelelő előkészítéssel már akár általános iskolában is tárgyalhatóak.

5. Függelék

Osztály	Létszám	Helyes ciklusfelírás (fő)	Helyes ciklusfelírás (%)
5. c	28	14	50
6. a	26	19	73
6. c	25	21	84
7. c	21	16	76
8. a	18	17	94
8. b	11	8	73
8. d	18	15	83
9. c	19	15	79
9. d	15	12	80
9. e	17	17	100
9. g	10	8	80
9. h	26	23	88
10. c	24	18	75
10. h	16	13	81
11. b	17	15	88
Összesen	291	231	79

1. táblázat. Statisztika a felmérő dolgozatokról



9. ábra. Kiosztott lapok a „C” játékhoz

Óraterv

15-ös játék

Tartalom	15-ös játék ismertetése, kirakása, kirakhatóságának vizsgálata.
Cél	A diákok ismerjék meg a játékot, tudjanak önállóan játszani vele. Tanulják meg eldönteni egy tetszőleges állásról, hogy kirakható-e a játék, ehhez fel tudjanak írni egy tetszőleges állást ciklusok szorzataként.
Tanulási eredmények	A diákok megismerik a játékot és annak kirakását. A diákok megtanulnak felírni egy tetszőleges kezdőállást ciklusok szorzataként. Megtanulják megállapítani egy tetszőleges állásról, hogy kirakható-e a játék.

Foglalkozásterv:

Fázis	Tevékenység	Idő
Óra menetének ismertetése	Bemutatkozok, majd ismertetem a 15-ös játékot, megkérdezem, hogy ki ismeri, ki játszott már vele.	2p
Játék kipróbálása	Néhány tanuló interaktív táblánál megpróbálhatja kirakni a játékot (ha nem sikerül segítséget nyújtok nekik).	6p
Játék történetének ismertetése	Prezentáció segítségével bemutatom a játék kialakulásának rövid történetét.	2p
Probléma ismertetése	Felvezetem a 15-14-es állást, és elmesélem a tanulóknak, hogy senki sem tudta innen kirakni a játékot, majd megmutatom nekik, hogy nem is lehetséges.	14p
Ciklusok felrajzolása	A diákokkal közösen egy tetszőleges állást felbontunk ciklusok szorzatára és eldöntjük, hogy kirakható-e abból az állásból a játék.	5p
Feladatlap kiosztás	Mindenkinek kiosztok egy lapot, amin az óra értékelése és egy feladat található, majd ismertetem a feladatukat.	1p
Játék és tanóra értékelése	A tanulók őszintén értékelik az órát, a játékot, és egyéb megjegyzést is tehetnek a lapon.	2p
Önálló feladatmegoldás	A diákoknak egy adott állásról meg kell állapítaniuk (indoklással), hogy onnan ki lehet-e rakni a játékot, ehhez fel kell írniuk az állást ciklusok szorzataként.	8p
Feladatlap beszedése	Az idő lejártával mindenkitől beszedem a feladatlapot, majd elmondom nekik a megoldást.	1p
Játék kirakása	A maradék időben a játékkal játszhatnak ismét a diákok.	4p

Óraterv

Cserélgetős játékok

Tartalom	Cserélgetős játékok ismertetése, kirakása. Minimális lépésszám meghatározása. Lépések összetétele. Hozzárendelések. Lineáris függvények. Összetett függvények.
Cél	A diákok ismerjék meg a játékokat, tudjanak önállóan játszani velük. Tanulják meg a „C” típusú játék minimális lépésszámát meghatározni. Vegyék észre, hogy függvényekkel játszanak, azokat működtetik (de a függvény fogalmát nem definiáljuk). Értsék meg, hogy egy lépés során milyen hozzárendelés történik, majd már a lineáris leképezéseknél is tudják alkalmazni a megtanultakat, és ezekre a függvényekre, mint játékos „függvénygépekre” gondoljanak. Ös--szetett függvényeket a használatuk előtt már látnak és játszanak is velük, majd a hozzárendelési szabályukat is értelmezni tudják.
Tanulási eredmények	A diákok megismerkednek a játékokkal és azoknak a kirakásával. A tanulókban kialakul egy kép a függvényekről. A diákok játék közben használják a függvényeket.

Foglalkozásterv:

Fázis	**Tevékenység**	**Idő**
Óra menetének ismertetése	Bemutatkozok, majd ismertetem, hogy milyen játékkal fogunk megismerkedni. Megkérdezem, hogy ki ismeri, ki játszott már vele.	2p
Játék kipróbálása	Néhány tanuló interaktív táblánál megpróbálhatja kirakni az „A” típusú játékot (ha nem sikerül segítséget nyújtok nekik).	4p
Játék kipróbálása	Néhány tanuló interaktív táblánál megpróbálhatja kirakni a „B” típusú játékot (ha nem sikerül segítséget nyújtok nekik).	5p
Játék kipróbálása	A tanulók egy általam kiosztott lapon megpróbálják kirakni a „C” típusú játékot, majd átmásolják a megoldásukat egy másik ábrára.	8p
Minimális lépésszám meghatározása	A diákokkal a saját megoldásaikból kiindulva észrevételeket jegyzünk le, majd meghatározzuk egy tetszőleges állás minimális lépésszámát.	6p
Függvénygépek bevezetése	A diákok felveszik az egyes lépések szerepét, és mint összetett függvénygépek „kirakják” a játékot.	5p
Lineáris függvények	A diákok ezután már nem csak diszkrét pontokra, hanem tetszőleges számokra határoznak meg függvényértékeket (továbbra is a függvénygépek szerepét felvéve).	8p
Lineáris függvények összetétele	A gyakorlás után az előző függvények összetételét játsszák el a diákok, és meghatározzák az így keletkezett összetett függvények értékeit.	7p

6. Köszönetnyilvánítás

Az Innovációs és Technológiai Minisztérium ÚNKP-19-2 Kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának szakmai támogatásával készült.

Új Nemzeti Kiválóság Program

Innovációs és Technológiai Minisztérium

Hivatkozások

Barcza István - Basa István - Tamásné Kollár Magdolna - Bálint Zsuzsanna - Kelemenné Kiss Ilona - Gyertyán Attila - Hankó Lászlóné 2016. *Matematika 9.* Eszterházy Károly Egyetem (Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet). Eger.

Clement, L. L. 2001. What do students really know about functions? *The Mathematics Teacher* 94: 745–748.

Dienes Zoltán 1999. *Építsük fel a matematikát.* SHL Hungary Kft. Budapest.

Even, R. 1993. Subject-matter knowledge and pedagogical content knowledge: prospective secondary teachers and the function concept. *Journal for Research in Mathematics Education* 24: 94–116.

Juhász István - Orosz Gyula - Paróczay József - Szászné Simon Judit, dr. 2016. *Matematika 9.* Eszterházy Károly Egyetem (Nemzedék Tudása Tankönyvkiadó Zrt.) Eger.

Katz Sándor 1989. *Függvények korszerű felfogásban.* Tankönyvkiadó. Budapest.

Katz Sándor 2010. *Lehet vagy nem?*
`https://matek.fazekas.hu/images/cikkek/20101006_cikkek_katzsandor_lehetetlen.pdf`

Kosztolányi József, dr. - Kovács István - Pintér Klára - Urbán János, dr. - Vincze István 2017. *Sokszínű matematika 9.* Mozaik Kiadó. Szeged.

Meel, D. E. 1999. Prospective teachers' understandings: function and composite function. *Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers. The Journal* 1: 12pp.

Pálfalvi Józsefné 2000. *Matematika didaktikusan.* Typotex Elektronikus Kiadó Kft. Budapest.

Pintér Klára 1993. Egy ötlet: Színezzük ki!. *Polygon* III/2: 84–96.

Pintér Klára 2013. *Matematika tantárgy-pedagógia.*
`http://www.jgypk.hu/mentorhalo/tananyag/Matematika_tantrgypedaggia/13_magyar_matematikatantsi_reformok.html`

Sfard, A. 1991. On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics* 22: 1–36.

Steketee, S. - Scher, D. 2012. Using multiple representations to teach composition of functions. *The Mathematics Teacher* 10: 260–268.

Tall, D. - Vinner, S. 1981. Concept images and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics* 12: 151–169.

Szanyi Gyöngyi 2017. *A függvényfogalom kialakításának vizsgálata.* (doktori értekezés). Debreceni Egyetem. Debrecen.

Vinner, S. - Dreyfus, T. 1989. Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education* 20: 356–366.

[1] 15-ös játék kirakhatóságáról prezi.
`https://prezi.com/view/TqsfxExnOEQYiQG4xhvl/`

[2] Kerettanterv az általános iskola 1-4. évfolyamára.
`http://kerettanterv.ofi.hu/01_melleklet_1-4/index_alt_isk_also.html`

[3] Kerettanterv az általános iskola 5-8. évfolyamára.
`http://kerettanterv.ofi.hu/02_melleklet_5-8/index_alt_isk_felso.html`

[4] Kerettanterv a gimnáziumok 9-12. évfolyama számára.
`http://kerettanterv.ofi.hu/03_melleklet_9-12/index_4_gimn.html`

[5] Nemzeti alaptanterv 2012.
`http://ofi.hu/sites/default/files/attachments/mk_nat_20121.pdf`