Szegedi Tudományegyetem
Természettudományi és Informatikai Kar

Bolyai Intézet
Sztochasztika tanszék

Szubkritikus Galton-Watson-folyamatok bevándorlással

Készítette: Wiandt Péter
Alkalmazott Matematikus MSc, I. évfolyam

Témavezető: Dr. Kevei Péter
Egyetemi docens
Sztochasztika tanszék

Szeged, 2019

Tartalomjegyzék

1. Bevezető

Dolgozatom a diszkrét idejű Galton-Watson folyamatokkal foglalkozik. Ezt joggal nevezhetjük modern, népszerű témának annak ellenére is, hogy Galton és Watson már 1873-ban leírta az alapjait, hiszen a fő eredmények csupán az 1900-as évek második felében születtek. Napjainkban is sokan foglalkoznak a témával, mivel még mindig sok a megválaszolatlan kérdés, a feltérképezetlen terület. Én is egy már korábban megválaszolt probléma természetes továbbgondolásával foglalkozom.

Mielőtt ismertetném munkám érdemi részét, előbb a Galton-Watson folyamat általános tulajdonságait mutatom be. A témában való elmélyülést, valamint a folyamat megértését Athreya és Ney [1] könyve könnyítette meg, melynek a jelölésrendszerét több helyen is használom. Tegyük fel, hogy egy adott populáció 0. generációját egyetlen egyed alkotja. Ennek az egyednek lesz véletlen számú leszármazottja és ők fogják alkotni az első generációt. A k. generációban minden egyednek lesz valahány leszármazottja egymástól, valamint az előző generációktól függetlenül, és ugyanolyan eloszlás szerint mint a 0. generációban levő egyednek. Ezek a leszármazottak lesznek az $(k+1)$. generáció egyedei, akikkel ugyanígy folytatódik a folyamat tovább. Ezt a típusú elágazó folyamatot nevezzük egytípusos, diszkrét idejű Galton-Watson folyamatnak.

A probléma először akkor vetődött fel, amikor az 1800-as évek második felében azt figyelték meg a viktoriánus-kori Angliában, hogy a hagyományos arisztokrata nevek mintha kezdenének eltűnni. Ezt a felvetést megvizsgálva tett fel egy kérdést Galton, majd nem sokkal később ezt válaszolta meg Watson. Ezután közösen kiadták az első cikket a témában.

A folyamatot akkor nevezzük d-típusosnak, ha a populációban valamilyen módon megkülönböztetünk d féle típust. Ekkor egy egyednek a leszármazottjait tekinthetjük úgy, mint egy véletlen vektort, melynek i. komponense $(1 \leq i \leq d)$ jelöli, hogy hány i. típusú leszármazottja születik. Természetesen az utódeloszlás ekkor is egymástól független és azonos eloszlású.

Egy további általánosítása az egyszerű Galton-Watson folyamatnak, melyre szükségünk lesz az a bevándorlás. Akkor nevezzük a folyamatot bevándorlásosnak, ha minden egyes generációban érkezik az utódeloszlástól és egymástól független számú, azonos eloszlású bevándorló.

2. Alapfogalmak és jelölések

Dolgozatomban diszkrét idejű, d-típusos bevándorlásos Galton-Watson folyamatokkal foglalkozom. Először a jelölésrendszert fogom bemutatni. A k. generációhoz tartozó i. típusú egyedek közül a j. leszármazottait jelölje $A_{i,j}^{(k)}$ (A továbbiakban i, j és d olyan egészek, melyekre $1 \leq i, j$ és $i \leq d$ teljesül). Ekkor egy tetszőleges i. típusú egyed összes leszármazottját jelölje $A_i^{(k)} \in \mathbb{R}^d$. Ekkor a leszármazottak várható érték mátrixa alatt a következő $M \in \mathbb{R}^{d \times d}$ mátrixot értjük:

$$M = \begin{bmatrix} \mathbf{E}(A_1^{(k)}) \\ \mathbf{E}(A_2^{(k)}) \\ . \\ . \\ . \\ \mathbf{E}(A_d^{(k)}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \dots & m_{1,d} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & \dots & m_{2,d} \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ m_{d,1} & m_{d,2} & \dots & m_{d,d} \end{bmatrix}.$$

Mivel a leszármazottak száma egymástól független és azonos eloszlású, így természetesen ez az M mátrix független attól, hogy hányadik generációt vesszük.

Egytípusos Galton-Watson folyamatok esetén, a leszármazottak számának várható értéke meghatározza a folyamat hosszútávú viselkedését. Ha a várható érték 1-nél kisebb, akkor szubkritikusnak nevezzük a folyamatot, ha 1 vagy 1-nél nagyobb, akkor pedig kritikusnak, illetve szuperkritikusnak nevezzük. A kihalási tétel szerint szubkritikus és kritikus esetben a folyamat kihal.

Ugyanezt a szerepet a többtípusos esetben a leszármazottak várható érték mátrixának spektrálsugara tölti be, amit $\rho(M)$ jelöl. A dolgozatomban a szubkritikus esettel foglalkozom, azaz amikor a $\rho(M) < 1$ egyenlőtlenség teljesül. Ebből az következik, hogy hosszútávon a populáció kihal bevándorlás nélkül. Ennek elkerülése miatt hozzáveszünk a folyamatunkhoz bevándorlást is. Jelölje a k. generációban érkezett egyedeket $B^{(k)} \in \mathbb{R}^d$. A bevándorolt egyedek száma természetesen egymástól független és azonos eloszlású.

Tehát összegezve azt mondhatjuk, hogy legyenek $\{A_{i,j}^{(k)}, B^{(k)} : 1 \leq i \leq d, j \geq 1, k \geq 0\}$ független véletlen vektorváltozók úgy, hogy $\{A_{i,j}^{(k)} : j \geq 1, k \geq 0\}$ azonos eloszlásúak $\forall i$-re. Ekkor jelölje a k. generáció egyedeit $X^{(k)} = (X_1^{(k)}, X_2^{(k)}, \dots, X_d^{(k)}) \in \mathbb{R}^d$, valamint legyen $X^{(0)} = \mathbf{0}$. Így már felírható formálisan is a folyamatunk:

$$X^{(k+1)} = \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{X_i^{(k)}} A_{i,j}^{(k)} + B^{(k+1)} =: \theta_{k+1} \otimes X^{(k)} + B^{(k+1)}, k \geq 0. \qquad (1)$$

Az egyszerűbb jelölés miatt vezessük be a Π_n véletlen operátort, melyre teljesülnek a következők:

$$\Pi_k = \theta_1 \otimes \theta_2 \otimes \cdots \otimes \theta_k,\ \ k \geq 1,$$

$$\Pi_0 = \mathrm{Id}.$$

Ennek a felhasználásával és (1) segítségével felírhatjuk a stacionárius eloszlásra a következőt:

$$X_\infty = B^{(1)} + \theta_1 \otimes B^{(2)} + \theta_1 \otimes \theta_2 \otimes B^{(3)} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \Pi_i \otimes B^{(i+1)}. \qquad (2)$$

(Itt a $B^{(i)}$ nem az előbbi alapján értelmezett i. generációban érkezett bevándorlókat jelöli, hanem úgymond hátulról van számozva az egyszerűség kedvéért, de ez természetesen nem befolyásolja az állításokat a későbbiekben.) Quine [3] generátorfüggvények segítségével megmutatta, hogy bizonyos feltételek mellett a folyamatnak létezik stacionárius eloszlása: Jelölje C az olyan d hosszú vektorokat, amiknek minden eleme nemnegatív, $b(j)$ pedig azt a valószínűséget, hogy $j \in C$ bevándorló lesz. Ekkor az előbbi jelölésekkel:

1. Tétel. *Ha az M utódeloszlás mátrixra teljesül, hogy elemenként véges, irreducibilis és aperiodikus, valamint $\rho(M) < 1$, továbbá van bevándorlás, akkor a*

$$\sum_{j \in C \setminus \{0\}} b(j) \log |j| < \infty,$$

ahol $|j| = \sum_{v=1}^{d} j_v$, szükséges és elégséges feltétel az $X^{(k)}$ folyamatra, hogy teljesüljön bármely $j \in C$ -re, hogy

$$\lim_{k \to \infty} P[X^{(k)} = j | X^{(0)} = i] = \pi(j),$$

függetlenül $i \in C$-től, ahol $\sum_{j \in C} \pi(j) = 1$.

Az eddig említetteken kívül szükség lesz még a vektornormák által indukált mátrixnormákra, azon belül is a tetszőleges $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mátrix esetén a

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq j\leq m} \sum_{k=1}^{n} |a_{jk}|$$

sorösszeg normára. Vegyük észre, hogy ekkor az $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{1\times n}$ vektor ∞ normája:

$$\|x\|_\infty = \sum_{k=1}^{n} |x_k|.$$

3. Az alapprobléma

Dolgozatom a többtípusos Galton-Watson folyamatok stacionárius eloszlás momentumainak létezésének feltételével foglalkozik. Először szigorúbb feltételek mellett mutatom meg, mikor létezik a folyamatom stacionárius eloszlásának $\alpha \in \mathbb{R}^+$-adik momentuma, majd pár feltételt elhagyva bizonyítom be, hogy általánosabban is igaz az állítás.

3.1. A fő állítás

A már előbb említett általánosabb állításhoz a motivációt a [2] cikk nyújtotta, amiben $\alpha \in \{1, 2, 3\}$-ra igazolva van az állítás bizonyos feltételek mellett. Quine is foglalkozott a [3] cikkben ezzel a kérdéssel, ő más módszerekkel az $\alpha = 2$ esetre látta be az állítást. Ezenkívül a [4]-ben is találkozhatunk az állításunk egy másfajta megközelítésével. Azonban ezek természetes módon vetik fel a kérdést, hogy igaz-e az állítás általánosan is, bármilyen pozitív α-ra. Megfelelő feltételeket keresve kaptam egy sejtést, melyet a dolgozatom későbbi részében be is fogok látni:

2. Tétel. *Legyen $X^{(k)}$ egy d-típusos, bevándorlásos, szubkritikus Galton-Watson folyamat, amire*

$$X^{(k+1)} = \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{X_i^{(k)}} A_{i,j}^{(k)} + B^{(k+1)} =: \theta_{k+1} \otimes X^{(k)} + B^{(k+1)}, k \geq 0,$$

valamint $X^{(0)} = (0, 0, \ldots, 0)$. A leszármazottakat jelölő $\{A_i, A_{i,j}^{(k)} : j, k \in \mathbb{N}\}$ változók azonos eloszlásúak ($\forall i \in \mathbb{N}$ esetén) és egymástól valamint a

$\{B, B^{(k)} : k \in \mathbb{N}\}$ bevándorlóktól függetlenek. Ha a leszármazottak

$$M = \begin{bmatrix} \mathbf{E}(A_1^{(k)}) \\ \mathbf{E}(A_2^{(k)}) \\ . \\ . \\ . \\ \mathbf{E}(A_d^{(k)}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \dots & m_{1,d} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & \dots & m_{2,d} \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ m_{d,1} & m_{d,2} & \dots & m_{d,d} \end{bmatrix}$$

várható érték mátrixára teljesül, hogy $\rho(M) \in (0, 1)$, akkor véve az

$$X_\infty = B^{(1)} + \theta_1 \otimes B^{(2)} + \theta_1 \otimes \theta_2 \otimes B^{(3)} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \Pi_i \otimes B^{(i+1)}$$

stacionárius eloszlást azt mondhatjuk, hogy $\mathbf{E}(\|X_\infty\|_\infty^\alpha) < \infty$ teljesül $\alpha \geq 1$-re, ha $\mathbf{E}(\|B\|_\infty^\alpha) < \infty$ és $\mathbf{E}(\|A_i\|_\infty^\alpha) < \infty$ is fenn áll $(\forall i \in \mathbb{N})$.

Ekkor az $\mathbf{E}(\|X_\infty\|_\infty^\alpha) < \infty$ állításból az következik, hogy X_∞ minden komponensének véges az α. momentuma.

3.2. A probléma két típus esetén

Rögtön ezzel a tétellel körülményes lenne foglalkozni a sok típus miatt, így először leegyszerűsítettem a problémát 2 típusra. Azonban így is egy problémába ütközünk a bizonyítás során, ezért egy plusz feltételt hozzá kell venni az állításhoz. Így született a következő állítás:

1. Lemma. *Legyen $X^{(k)}$ egy kéttípusos, bevándorlásos, szubkritikus Galton-Watson folyamat, amire*

$$X^{(k+1)} = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{X_i^{(k)}} A_{i,j}^{(k)} + B^{(k+1)} =: \theta_{k+1} \otimes X^{(k)} + B^{(k+1)}, k \geq 0,$$

valamint $X^{(0)} = (0, 0)$. A leszármazottakat jelölő $\{A_i, A_{i,j}^{(k)} : j, k \in \mathbb{N}\}$ változók azonos eloszlásúak ($\forall i \in \{1, 2\}$ esetén) és egymástól valamint a $\{B, B^{(k)} : k \in \mathbb{N}\}$ bevándorlóktól függetlenek. A leszármazottak

$$M = \mathbf{E}\left(\begin{bmatrix} A_1^{(k)} \\ A_2^{(k)} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} \\ m_{2,1} & m_{2,2} \end{bmatrix}$$

várható érték mátrixára teljesül, hogy $\rho(M) \in (0,1)$ valamint a $\mu_1 = (m_{1,1} + m_{1,2})$, $\mu_2 = (m_{2,1} + m_{2,2})$ sorösszegek rendre kisebbek egynél. Ekkor véve a

$$X_\infty = B^{(1)} + \theta_1 \otimes B^{(2)} + \theta_1 \otimes \theta_2 \otimes B^{(3)} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \Pi_i \otimes B^{(i+1)}$$

stacionárius eloszlást azt mondhatjuk, hogy $\mathbf{E}(\|X_\infty\|_\infty^\alpha) < \infty$ teljesül $\alpha \geq 1$-re, ha $\mathbf{E}(\|B\|_\infty^\alpha) < \infty$ és $\mathbf{E}(\|A_i\|_\infty^\alpha) < \infty$ is fenn áll $(1 \leq i \leq d)$.

Bizonyítás. Legyen $M_\alpha(k) = \mathbf{E}(\|\theta_1 \otimes \theta_2 \otimes \cdots \otimes \theta_k \otimes B^{(k+1)}\|_\infty^\alpha)$. Először azt akarjuk megmutatni, hogy $M_\alpha(k)$ exponenciálisan csökken ahogy k-t növeljük.

Ehhez vizsgáljuk a következő kifejezést:

$$\mathbf{E}\left(\left\|\frac{\sum_{i=1}^{n} A_{1,i} + \sum_{j=1}^{m} A_{2,j}}{n+m}\right\|_\infty^\alpha\right). \tag{3}$$

Legyen $S_n = (S_n^{(1)}, S_n^{(2)}) = \sum_{i=1}^{n} A_{1,i}$ és $Z_m = (Z_m^{(1)}, Z_m^{(2)}) = \sum_{j=1}^{m} A_{2,j}$ és $f(x) = x^\alpha$ függvény, ahol $\alpha \geq 1$. Ekkor f konvex, ezért a Jensen-egyenlőtlenség szerint:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

Legyen $\tilde{S}_n = S_n^{(1)} + S_n^{(2)} = \sum_{i=1}^{n} \|A_{1,i}\|_\infty \in \mathbb{R}$ és $\tilde{Z}_m = Z_m^{(1)} + Z_m^{(2)} = \sum_{j=1}^{m} \|A_{2,j}\|_\infty \in \mathbb{R}$. Ekkor a Jensen-egyenlőtlenséget felhasználva:

$$\left(\frac{\tilde{S}_n + \tilde{Z}_m}{n+m}\right)^\alpha = \left(\frac{\tilde{S}_n}{n}\frac{n}{n+m} + \frac{\tilde{Z}_m}{m}\frac{m}{n+m}\right)^\alpha \leq$$

$$\leq \frac{n}{n+m}\left(\frac{\tilde{S}_n}{n}\right)^\alpha + \frac{m}{n+m}\left(\frac{\tilde{Z}_m}{m}\right)^\alpha.$$

Ezek alapján felírhatjuk (3) kifejezésre a következőt:

$$\mathbf{E}\left(\left\|\frac{\sum_{i=1}^{n} A_{1,i} + \sum_{j=1}^{m} A_{2,j}}{n+m}\right\|_\infty^\alpha\right) \leq$$

$$\leq \mathbf{E}\left(\frac{n}{n+m}\left\|\frac{\sum_{i=1}^{n} A_{1,i}}{n}\right\|_\infty^\alpha + \frac{m}{n+m}\left\|\frac{\sum_{j=1}^{m} A_{2,j}}{m}\right\|_\infty^\alpha\right).$$

Ekkor a Jensen-egyenlőtlenségnek köszönhetően már nem kell a két különböző típusú egyedek leszármazottainak a viselkedését egyszerre vizsgálni, hanem külön-külön nézhetjük meg, hogy hova konvergál $\sum_{i=1}^{n} \frac{A_{1,i}}{n}$ illetve $\sum_{j=1}^{m} \frac{A_{2,j}}{m}$, ha $n, m \to \infty$. Ezek pedig konvergálnak a nagy számok törvénye miatt, így $\forall \mu_1^\alpha < \rho_1 < 1$-hoz $\exists n_0$, hogy $\forall n \geq n_0$-re:

$$\mathbf{E}\left(\left\|\frac{\sum_{i=1}^{n} A_{1,i}}{n}\right\|_\infty^\alpha\right) \leq \rho_1.$$

Ugyanígy $\forall \mu_2^\alpha < \rho_2 < 1$-hoz $\exists m_0$, hogy $\forall m \geq m_0$-re:

$$\mathbf{E}\left(\left\|\frac{\sum_{j=1}^{m} A_{2,j}}{m}\right\|_\infty^\alpha\right) \leq \rho_2.$$

Ekkor ha $n_0 < n, m_0 < m$, akkor:

$$\mathbf{E}\left(\frac{n}{n+m}\left\|\frac{\sum_{i=1}^{n} A_{1,i}}{n}\right\|_\infty^\alpha + \frac{m}{n+m}\left\|\frac{\sum_{j=1}^{m} A_{2,j}}{m}\right\|_\infty^\alpha\right) \leq$$

$$\leq \frac{n \cdot \rho_1 + m \cdot \rho_2}{n+m} \leq \frac{n \cdot \rho + m \cdot \rho}{n+m} = \rho < 1,$$

ahol $\rho = \max\{\rho_1, \rho_2\} < 1$.

Ekkor legyen $c_0 = \max\{n_0, m_0\}$, valamint:

$$C_0 = 2 \cdot \max\left\{\mathbf{E}\left(\left\|\sum_{i=1}^{c_0} A_{1,i}\right\|_\infty^\alpha\right), \mathbf{E}\left(\left\|\sum_{j=1}^{c_0} A_{2,j}\right\|_\infty^\alpha\right)\right\}. \tag{4}$$

Így ekkor, ha az $n_0 < n, m_0 < m$ állításokból pontosan egy teljesül, például $n_0 < n$, akkor a következőt írhatjuk:

$$\mathbf{E}\left(\frac{n}{n+m}\left\|\frac{\sum_{i=1}^{n} A_{1,i}}{n}\right\|_\infty^\alpha + \frac{m}{n+m}\left\|\frac{\sum_{j=1}^{m} A_{2,j}}{m}\right\|_\infty^\alpha\right) \leq$$

$$\leq \frac{n \cdot \rho_1 + C_0/2}{n+m} \leq \frac{n \cdot \rho + C_0/2}{n+m}. \tag{5}$$

Ekkor létezik olyan $K > 0$ és $\epsilon > 0$ úgy, hogy $\forall n, m$-re, amire $n + m > K$ teljesül:

$$\frac{C_0/2}{n+m} < 1 - \rho - \epsilon,$$

ahol $1-\rho-\epsilon>0$. Tehát (5)-ot folytatva:

$$\frac{n\cdot\rho+m_0\cdot C_0/2}{n+m}<\frac{n\cdot\rho}{n+m}+1-\rho-\epsilon<\rho+1-\rho-\epsilon:=\tilde{\rho}<1.$$

Ezek után felírhatjuk a következőt: Létezik olyan K egész szám, amelyre teljesül, hogy $\forall n,m$-re, ha $\|(n,m)\|_\infty=n+m>K$, akkor

$$\mathbf{E}\left(\left\|\frac{\sum_{i=1}^n A_{1,i}+\sum_{j=1}^m A_{2,j}}{n+m}\right\|_\infty^\alpha\right)\leq\tilde{\rho}<1. \tag{6}$$

Ezenkívül felül tudjuk becsülni az összes hasonló összeget, ahol $n+m<K$. Azaz $\forall n,m$-re, ahol $n+m<K$ teljesül:

$$C_0\geq\mathbf{E}\left(\left\|\sum_{i=1}^n A_{1,i}+\sum_{j=1}^m A_{2,j}\right\|_\infty^\alpha\right).$$

Továbbra is $M_\alpha(k)$ viselkedését szeretnénk vizsgálni és valamilyen rekurzív előállítást találni rá, aminek segítségével majd explicit becslést tudunk adni rá. Ehhez veszünk egy $Y=(Y_1,Y_2)$ vektort, ahol Y_1 és Y_2 nemnegatív értékű véletlen változók, és Y független az A_1 illetve A_2 véletlen változóktól. Ezután vesszük a következőket:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(\left\|\sum_{i=1}^{Y_1} A_{1,i}+\sum_{j=1}^{Y_2} A_{2,j}\right\|_\infty^\alpha\right)&=\\=\sum_k\sum_l\mathbf{P}(Y=(k,l))\mathbf{E}&\left(\left\|\sum_{i=1}^{k} A_{1,i}+\sum_{j=1}^{l} A_{2,j}\right\|_\infty^\alpha\right)\\+\sum_p\sum_q\mathbf{P}(Y=(p,q))\mathbf{E}&\left(\left\|\sum_{i=1}^{p} A_{1,i}+\sum_{j=1}^{q} A_{2,j}\right\|_\infty^\alpha\right),\end{aligned}$$

ahol $k+l\leq K$ és $p+q>K$. Az előbbiek miatt nyilván véges sok olyan (k,l) számpár van ami kielégíti a $k+l\leq K$ egyenlőtlenséget (pontosan $K(K+1)$darab). Így az előbbit folytatva valamint (4) becslést felhasználva kapjuk, hogy:

$$\mathbf{E}\left(\left\|\sum_{i=1}^{Y_1} A_{1,i} + \sum_{j=1}^{Y_2} A_{2,j}\right\|_\infty^\alpha\right) \leq$$

$$\leq \sum_k \sum_l \mathbf{P}(Y=(k,l))C_0 + \sum_p \sum_q \mathbf{P}(Y=(p,q))\mathbf{E}\left(\left\|\sum_{i=1}^{p} A_{1,i} + \sum_{j=1}^{q} A_{2,j}\right\|_\infty^\alpha\right) \leq$$

$$\leq C_0 \mathbf{P}(\|Y\|_\infty \geq 1) + \sum_p \sum_q \mathbf{P}(Y=(p,q))(p+q)^\alpha \tilde{\rho} \leq$$

$$\leq C_0 \mathbf{E}(\|Y\|_\infty) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \mathbf{P}(Y=(n,m))(n+m)^\alpha \tilde{\rho} \leq$$

$$\leq C_0 \mathbf{E}(\|Y\|_\infty) + \tilde{\rho}\mathbf{E}(\|Y\|_\infty^\alpha),$$

ahol felhasználtuk többek közt, hogy a (3) kifejezésre $(n+m) > K$ esetén teljesül, hogy nem lesz nagyobb, mint $\tilde{\rho} < 1$, azaz megfelelő (n,m)-re

$$\mathbf{E}\left(\left\|\sum_{i=1}^{n} A_{1,i} + \sum_{j=1}^{m} A_{2,j}\right\|_\infty^\alpha\right) \leq (n+m)^\alpha \tilde{\rho}.$$

Legyen $Y = \theta_1 \otimes \theta_2 \otimes \cdots \otimes \theta_{k-1} \otimes B^{(k)}$. Ennek segítségével adhatunk már egy összefüggést $M_\alpha(k)$-ra. Ekkor az előbb kapott

$$\mathbf{E}\left(\left\|\sum_{i=1}^{Y_1} A_{1,i} + \sum_{j=1}^{Y_2} A_{2,j}\right\|_\infty^\alpha\right) \leq C_0 \mathbf{E}(\|Y\|_\infty) + \tilde{\rho}^\alpha \mathbf{E}\left(\|Y\|_\infty^\alpha\right)$$

egyenlőtlenséget felhasználva kapjuk, hogy

$$M_\alpha(k) \leq C_0 M_1(k-1) + \tilde{\rho} M_\alpha(k-1). \tag{7}$$

Itt felhasználtuk, hogy az előbb definiált Y segítségével ki tudjuk fejezni a következőket is:

$$M_\alpha(k-1) = \mathbf{E}(\|\theta_1 \otimes \theta_2 \otimes \cdots \otimes \theta_{k-1} \otimes B^{(k)}\|_\infty^\alpha) = \mathbf{E}\,\|Y\|_\infty^\alpha. \tag{8}$$

$Y = (Y_1, Y_2)$ miatt:

$$M_\alpha(k) = \mathbf{E}(\|\theta_1 \otimes \theta_2 \otimes \cdots \otimes \theta_k \otimes B^{(k+1)}\|_\infty^\alpha) = \mathbf{E}\left(\left\|\sum_{i=1}^{Y_1} A_{1,i} + \sum_{j=1}^{Y_2} A_{2,j}\right\|_\infty^\alpha\right). \tag{9}$$

Így pedig már következik a (8) és (9) összefüggésekből a (7) állítás.

Ez egy rekurzív összefüggés amit kaptunk, így iterálva kaphatunk egy explicit becslést $M_\alpha(k)$-ra. Ehhez vizsgáljuk meg, hogy hogyan fog kinézni egy lépéssel később az összefüggés:

$$M_\alpha(k-1) \leq C_0 M_1(k-2) + \tilde{\rho} M_\alpha(k-2).$$

Ezt és (7)-ot felhasználva kapjuk, hogy:

$$M_\alpha(k) \leq C_0(M_1(k-1) + \tilde{\rho} M_1(k-2)) + \tilde{\rho}^2 M_\alpha(k-2)$$

Innen pedig már megsejthetjük, hogy mi lesz az iteráció vége:

$$M_\alpha(k) \leq C_0(M_1(k-1) + \tilde{\rho} M_1(k-2) + \cdots + \tilde{\rho}^{k-1} M_1(0)) + \tilde{\rho}^k M_\alpha(0).$$

Ezt átalakítva kapjuk a következő alakot, amit teljes indukció segítségével könnyen igazolhatunk:

$$M_\alpha(k) \leq C_0 \left(\sum_{i=0}^{k-1} \tilde{\rho}^i M_1(k-1-i) \right) + \tilde{\rho}^k M_\alpha(0). \tag{10}$$

Felhasználva $M_\alpha(k)$ definícióját valamint a mátrixnormák tulajdonságait, azt kapjuk, hogy:

$$M_1(k) = \mathbf{E}\left(\left\|\theta_1 \otimes \theta_2 \otimes \cdots \otimes \theta_k \otimes B^{(k+1)}\right\|_\infty\right) \leq \left\|M^k\right\|_\infty \mathbf{E}(\left\|B^{(k+1)}\right\|_\infty)$$
$$\leq \|M\|_\infty^k \mathbf{E}(\left\|B^{(k+1)}\right\|_\infty).$$

Feltettük, hogy a $\mu_1 = (m_{1,1} + m_{1,2})$, $\mu_2 = (m_{2,1} + m_{2,2})$ sorösszegek rendre kisebbek egynél, így véve egy $\lambda \in [\max\{\mu_1; \mu_2\}, 1)$ számot:

$$M_1(k) \leq \|M\|_\infty^k \mathbf{E}(\left\|B^{(k+1)}\right\|_\infty) \leq \lambda^k \mathbf{E}(\left\|B^{(k+1)}\right\|_\infty).$$

Ismét $M_\alpha(k)$ definícióját alkalmazva:

$$M_\alpha(0) = \mathbf{E}(\left\|B^{(1)}\right\|_\infty^\alpha).$$

Mivel a bevándorlók száma, azaz $\{B, B^{(k)} : k \in \mathbb{N}\}$ véletlen változók azonos eloszlásúak, így

$$\mathbf{E}(\left\|B^{(1)}\right\|_\infty) = \mathbf{E}(\left\|B^{(2)}\right\|_\infty) = \cdots = \mathbf{E}(\left\|B^{(k+1)}\right\|_\infty) = \mathbf{E}(\|B\|_\infty) := c < \infty.$$

Az így kapottakat beírva (10)-be:

$$\begin{aligned}
M_\alpha(k) &\leq C_0\left(\sum_{i=0}^{k-1}\tilde{\rho}^i M_1(k-1-i)\right)+\tilde{\rho}^k M_\alpha(0)\leq\\
&\leq C_0\left(\sum_{i=0}^{k-1}\tilde{\rho}^i\lambda^{k-1-i}\mathbf{E}(\left\|B^{(k-i)}\right\|_\infty)\right)+\tilde{\rho}^k\mathbf{E}(\left\|B^{(1)}\right\|_\infty^\alpha)=.\\
&=C_0\cdot c\left(\sum_{i=0}^{k-1}\tilde{\rho}^i\lambda^{k-1-i}\right)+\tilde{\rho}^k\mathbf{E}(\|B\|_\infty^\alpha).
\end{aligned}$$

Azt is feltettük, hogy $\mathbf{E}(\|B\|_\infty^\alpha)$ véges, így legyen

$$c^*=\max\{C_0\cdot c\cdot k;\tilde{\rho}\mathbf{E}(\|B\|_\infty^\alpha)\}\leq\infty,$$

valamint $\nu=\max\{\tilde{\rho};\lambda\}<1$.

Ekkor azt kapjuk, hogy

$$M_\alpha(k)\leq c^*\nu^{k-1}.$$

Tehát ezzel beláttuk, hogy $M_\alpha(k)$ valóban exponenciálisan csökken. Mivel ahogy már korábban is felírtuk:

$$X_\infty=B^{(1)}+\theta_1\otimes B^{(2)}+\theta_1\otimes\theta_2\otimes B^{(3)}+\cdots=\sum_{i=0}^{\infty}\Pi_i\otimes B^{(i+1)},$$

így látható, hogy X_∞ vizsgálatában segít az előbb megállapított exponenciális csökkenés. Azonban a lemmában szereplő $\mathbf{E}(\|X_\infty\|_\infty^\alpha)<\infty$ állítás belátáshoz szükségünk lesz még a Minkowski-egyenlőtlenségre.

Ezt a következőképpen tudjuk alkalmazni:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{E}(\|X_\infty\|_\infty^\alpha))^{\frac{1}{\alpha}} &= \left(\mathbf{E}(\|B^{(1)}+\theta_1\otimes B^{(2)}+\theta_1\otimes\theta_2\otimes B^{(3)}+\ldots\|_\infty^\alpha)\right)^{\frac{1}{\alpha}}\\
=\left(\mathbf{E}\left(\left\|\sum_{i=0}^{\infty}\Pi_i\otimes B^{(i+1)}\right\|_\infty^\alpha\right)\right)^{\frac{1}{\alpha}} &\leq \sum_{i=0}^{\infty}\left(\mathbf{E}\left(\left\|\Pi_i\otimes B^{(i+1)}\right\|_\infty^\alpha\right)\right)^{\frac{1}{\alpha}}\\
=\sum_{i=0}^{\infty}(M_\alpha(i))^{\frac{1}{\alpha}} &\leq c^{*\frac{1}{\alpha}}\sum_{i=0}^{\infty}\nu^{\frac{i}{\alpha}}=c^{*\frac{1}{\alpha}}\frac{1}{1-\nu^{\frac{1}{\alpha}}}<\infty.
\end{aligned}$$

Tehát azt kaptuk, hogy a vizsgált $\mathbf{E}(\|X_\infty\|_\infty^\alpha)$-nek az $\frac{1}{\alpha}$. hatványa véges. Mivel $1\leq\alpha<\infty$, így értelemszerűen az előbbi véges értékű kifejezésnek az α. hatványa is véges lesz, azaz éppen az állításban szereplő $\mathbf{E}(\|X_\infty\|_\infty^\alpha)<\infty$-t kaptuk. Ezzel beláttuk a lemmánkat. $\square$

Ez szemléletesen azt is jelenti, hogy a megfelelő feltételek mellett a stacionárius eloszlás minden komponense véges lesz, azaz az egyes típusú egyedek számának α. momentuma is véges lesz, hiszen értelemszerűen teljesül a következő:

$$\mathbf{E}\left(\|X_{i,\infty}\|_\infty^\alpha\right) \leq \mathbf{E}\left(\|X_\infty\|_\infty^\alpha\right), i \in \{1, 2\},$$

ahol $X_{i,\infty}$ az i. típusú egyedek számát jelöli a stacionárius eloszlásban.

Észrevehettük, hogy a bizonyítás nem használja ki konkrétan azt, hogy csak két különböző típus van. Ez csupán azért volt, mert könnyebben kezelhető volt számomra kezdetben a probléma, ha nem rögtön a d-típusos változatot vizsgáltam, hanem 2 változóra néztem meg, hogy hogyan viselkedik a folyamat.

Így értelemszerűen apróbb változtatásokkal következik az 1. Lemma bizonyításából az állítás d-típusos változatának is a bizonyítása. Ezt fogjuk a következőkben megnézni.

3.3. A d-típusos változat

2. Lemma. *Legyen $X^{(k)}$ egy d-típusos, bevándorlásos, szubkritikus Galton-Watson folyamat, amire*

$$X^{(k+1)} = \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{X_i^{(k)}} A_{i,j}^{(k)} + B^{(k+1)} =: \theta_{k+1} \otimes X^{(k)} + B^{(k+1)}, k \geq 0,$$

valamint $X^{(0)} = (0, 0, \ldots, 0)$. A leszármazottakat jelölő $\{A_i, A_{i,j}^{(k)} : j, k \in \mathbb{N}\}$ változók azonos eloszlásúak ($\forall i \in \{1, 2, \ldots, d\}$ -re) és egymástól valamint a $\{B, B^{(k)} : k \in \mathbb{N}\}$ bevándorlóktól függetlenek. A leszármazottak

$$M = \begin{bmatrix} \mathbf{E}(A_1^{(k)}) \\ \mathbf{E}(A_2^{(k)}) \\ . \\ . \\ . \\ \mathbf{E}(A_d^{(k)}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \ldots & m_{1,d} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & \ldots & m_{2,d} \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ m_{d,1} & m_{d,2} & \ldots & m_{d,d} \end{bmatrix}$$

várható érték mátrixára teljesül, hogy $\rho(M) \in (0, 1)$ valamint a $\mu_i = (m_{i,1} + m_{i,2} + \cdots + m_{i,d})$, sorösszegek rendre kisebbek egynél. Ekkor véve a

$$X_\infty = B^{(1)} + \theta_1 \otimes B^{(2)} + \theta_1 \otimes \theta_2 \otimes B^{(3)} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \Pi_i \otimes B^{(i+1)}$$

stacionárius eloszlást azt mondhatjuk, hogy $\mathbf{E}(\|X_\infty\|_\infty^\alpha) < \infty$ *teljesül* $\alpha \geq 1$*-re, ha* $\mathbf{E}(\|B\|_\infty^\alpha) < \infty$ *és* $\mathbf{E}(\|A_i\|_\infty^\alpha) < \infty$ *is fenn áll* $(\forall i \in \mathbb{N})$.

Bizonyítás. Mint azt már korábban írtam, ennek a bizonyítása nagyon hasonló, mint az (1) lemmáé. Így csak azon részeit mutatom be, amik változnak. Most a (3) kifejezés helyett a következőt vizsgáljuk:

$$\mathbf{E}\left(\left\|\frac{\sum_{i=1}^{m_1} A_{1,i} + \cdots + \sum_{j=1}^{m_d} A_{d,j}}{(m_1 + \cdots + m_d)}\right\|_\infty^\alpha\right).$$

Erre is ugyanúgy alkalmazható a Jensen-egyenlőtlenség, valamint ha feltesszük, hogy egy adott $m_{1,0} < m_1, m_{2,0} < m_2, \ldots, m_{d_0} < m_d$, akkor:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(\left\|\frac{\sum_{i=1}^{m_1} A_{1,i} + \cdots + \sum_{j=1}^{m_d} A_{d,j}}{(m_1 + \cdots + m_d)}\right\|_\infty^\alpha\right) &\leq \\ \leq \frac{m_1 \cdot \rho_1 + \cdots + m_n \cdot \rho_d}{m_1 + \cdots + m_d} &\leq \\ \leq \frac{m_1 \cdot \rho + m_d \cdot \rho}{m_1 + \cdots + m_d} &= \rho < 1,\end{aligned}$$

ahol $\rho = \max\{\rho_1; \ldots; \rho_d\} < 1$. Látható, hogy ugyanazt kaptuk itt is, mint kéttípusos esetben. Ez a kifejezés, ha csak valamely m_i-re nem teljesül, hogy $m_{i,0} < m_i$, akkor is egynél kisebb lesz (most m_1-re):

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(\frac{m_1}{m_1 + \cdots + m_d}\left\|\frac{\sum_{i=1}^{m_1} A_{1,i}}{m_1}\right\|_\infty^\alpha + \cdots + \frac{m_d}{m_1 + \cdots + m_d}\left\|\frac{\sum_{j=1}^{m_d} A_{d,j}}{m_d}\right\|_\infty^\alpha\right) \leq \\ \leq \mathbf{E}\left(\frac{C_0/d}{m_1 + \cdots + m_d} + \cdots + \frac{m_d}{m_1 + \cdots + m_d}\left\|\frac{\sum_{j=1}^{m_d} A_{d,j}}{m_d}\right\|_\infty^\alpha\right).\end{aligned}$$

Itt is igaz lesz, hogy tudunk adni $m_1 + m_2 + \ldots + m_d$-re olyan korlátot, hogy ha annál nagyobb lesz az összeg, akkor a kifejezésünk ismét egy 1-nél kisebb számnál, $\tilde{\rho}$-nál kisebb lesz. Azaz létezik olyan $K > 0$, hogy $\forall m_1, \ldots, m_d$-re, ha $\|(m_1, \ldots, m_d)\|_\infty = m_1 + \cdots + m_d < K$, akkor

$$\mathbf{E}\left(\left\|\frac{\sum_{i=1}^{m_1} A_{1,i} + \cdots + \sum_{j=1}^{m_d} A_{d,j}}{(m_1 + \cdots + m_d)}\right\|_\infty^\alpha\right) < \tilde{\rho} < 1.$$

Innentől kezdve minden alkalmazható ugyanúgy, mint kétváltozós esetben, csak most nem 2, hanem d-hosszúságú vektorokkal kell dolgozni. □

Ezzel beláttuk a lemmánkat, ami láthatóan érdemien nem különbözött az előző bizonyítástól. Ezek után már visszatérhetünk a 2. Tételre, dolgozatom fő állítására. Ennek bizonyítása az 1. és 2. Lemmák bizonyításának a mintájára történik, valamint kell még hozzá egy új ötlet.

3.4. A fő állítás bizonyítása

A 2. Tétel bizonyítása. Először azt használjuk fel, hogy tetszőleges indukált mátrix norma és A mátrix esetén teljesül a következő:

$$\lim_{r\to\infty} \|A^r\|^{\frac{1}{r}} = \rho(A).$$

Mivel $\rho(M) < 1$, így létezik olyan $r_0 \in \mathbb{N}$, amire teljesül, hogy ha $r > r_0$, akkor

$$\|M^r\|_{\infty}^{\frac{1}{r}} < 1.$$

Ebből következik természetesen az is, hogy

$$\|M^r\|_{\infty} < 1,$$

ami azt jelenti, hogy az M^r mátrix $\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2, \dots, \tilde{\mu}_n$ sorösszegei rendre kisebbek egynél. Az (1) lemmához képest, most legyen:

$$M_\alpha(k) = \mathbf{E}(\|\theta_1 \otimes \theta_2 \otimes \cdots \otimes \theta_{r_0\cdot k} \otimes B^{(r_0\cdot k+1)}\|_{\infty}^{\alpha}).$$

Most azt szeretnénk belátni ismét, hogy $M_\alpha(k)$ exponenciálisan csökken. Természetesen ha ezt belátjuk, akkor azzal

$$\mathbf{E}(\|\theta_1 \otimes \theta_2 \otimes \cdots \otimes \theta_k \otimes B^{(k+1)}\|_{\infty}^{\alpha})$$

exponenciális csökkenését is belátjuk, hiszen ha tudjuk, hogy r_0 lépésenként exponenciálisan csökken a kifejezésünk, attól függetlenül melyik helyzettől figyeljük, akkor az egész egy lépésenként is igaz lesz ez rá.

Az előbbiek miatt, most nem is az egyedek közvetlen leszármazottainak a számát fogjuk vizsgálni a folyamatban, hanem r_0 lépésenként fogjuk tekinteni a folyamatot, hogy megfelelő tulajdonságokkal rendelkezzen majd. Tehát a k. generációhoz tartozó i. típusú egyedek közül a j. leszármazottait r_0 generációval később jelölje $\tilde{A}_{i,j}^{(k)}$. Így felírhatjuk a szokásos kifejezést a mostani esetre is, ha $m_{1,0} < m_1, m_{2,0} < m_2, \dots, m_{d_0} < m_d$:

$$\mathbf{E}\left(\left\|\frac{\sum_{i=1}^{m_1} \tilde{A}_{1,i} + \cdots + \sum_{j=1}^{m_d} \tilde{A}_{n,j}}{m_1 + \cdots + m_d}\right\|_{\infty}^{\alpha}\right) \leq$$

$$\leq \mathbf{E}\left(\frac{m_1}{m_1+\cdots+m_d}\left\|\frac{\sum_{i=1}^{m_1}\tilde{A}_{1,i}}{m_1}\right\|_\infty^\alpha+\cdots+\frac{m_d}{m_1+\cdots+m_d}\left\|\frac{\sum_{j=1}^{m_d}\tilde{A}_{1,j}}{m_d}\right\|_\infty^\alpha\right)=$$

$$=\frac{m_1\tilde{\rho}_1+\cdots+m_d\tilde{\rho}_d}{m_1+\cdots+m_d}\leq\tilde{\rho}<1,$$

ahol $\tilde{\rho}=\max\{\tilde{\rho}_1,\ldots,\tilde{\rho}_d\}$.

Ezek után a bizonyítás éppen ugyanúgy megy mint az 1. és 2. Lemmákban. Így kaphatjuk itt is, hogy

$$M_\alpha(k)\leq C_0M_1(k-1)+\tilde{\rho}M_\alpha(k-1).$$

Amiből a következő összefüggést kapjuk:

$$M_\alpha(k)\leq c^*\tilde{\nu}_1^{k-1},$$

ahol $\tilde{\nu}_1<1$. Mint ahogy azt a bizonyítás elején írtam, hogy nem fontos, hogy $M_\alpha(k)$-t honnan kezdjük el számozni, úgyis hasonlót kapunk. Tehát ha

$$M_\alpha(k)=\mathbf{E}(\|\theta_1\otimes\theta_2\otimes\cdots\otimes\theta_{r_0\cdot k}\otimes B^{(r_0\cdot k+2)}\|_\infty^\alpha).$$

lett volna, akkor is természetesen ugyanilyen eredmények lennének, azaz kapnánk, hogy

$$M_\alpha(k)\leq c^*\tilde{\nu}_2^{k-1},$$

ahol $\tilde{\nu}_2<1$. És ugyanígy $\forall i\in\{1;2;\ldots;r_0\}$ esetén, ha

$$M_\alpha(k)=\mathbf{E}(\|\theta_1\otimes\theta_2\otimes\cdots\otimes\theta_{r_0\cdot k}\otimes B^{(r_0\cdot k+r_0)}\|_\infty^\alpha),$$

akkor

$$M_\alpha(k)\leq c^*\tilde{\nu}_{r_0}^{k-1},$$

ahol $\tilde{\nu}_{r_0}<1$. Ekkor legyen $\tilde{\nu}=\max\{\tilde{\nu}_1;\ldots;\tilde{\nu}_{r_0}\}$. Így már csak az utolsó lépés van hátra a bizonyításból, ami ismét a korábbi lemmákhoz hasonlóan fog történni:

$$\begin{aligned}(\mathbf{E}(\|X_\infty\|_\infty^\alpha))^{\frac{1}{\alpha}}&=\left(\mathbf{E}(\|B^{(1)}+\theta_1\otimes B^{(2)}+\theta_1\otimes\theta_2\otimes B^{(3)}+\ldots\|_\infty^\alpha)\right)^{\frac{1}{\alpha}}=\\&=\left(\mathbf{E}\left(\left\|\sum_{i=0}^{\infty}\Pi_i\otimes B^{(i+1)}\right\|_\infty^\alpha\right)\right)^{\frac{1}{\alpha}}\leq\\&\leq\sum_{i=0}^{\infty}\left(\mathbf{E}\left(\|\Pi_i\otimes B^{(i+1)}\|_\infty^\alpha\right)\right)^{\frac{1}{\alpha}}\leq\\&\leq\tilde{c}^{*\frac{1}{\alpha}}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{r_0}\tilde{\nu}_j^{\frac{i}{\alpha}}\leq r_0\tilde{c}^{*\frac{1}{\alpha}}\sum_{i=0}^{\infty}\tilde{\nu}^{\frac{i}{\alpha}}<\infty\end{aligned}.$$

És ezzel valóban beláttam dolgozatom fő állítását, miszerint $\mathbf{E}(\|X_\infty\|_\infty^\alpha)$ véges.

$\square$

Köszönetnyilvánítás:

Dolgozatom az Innovációs és Technológiai Minisztérium ÚNKP-19-2 Kódszámú Új Nemzeti Kiválóság Programjának szakmai támogatásával készült.

Hivatkozások

[1] Krishna B. Athreya and Peter E. Ney. *Branching processes.* Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1972. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 196.

[2] Mátyás Barczy, Fanni K. Nedényi, and Gyula Pap. On aggregation of multitype Galton-Watson branching processes with immigration. *Mod. Stoch. Theory Appl.*, 5(1):53–79, 2018.

[3] M. P. Quine. The multi-type Galton-Watson process with immigration. *J. Appl. Probability*, 7:411–422, 1970.

[4] Gábor Szűcs. Ergodic properties of subcritical multitype Galton-Watson processes. Available on arXiv: https://arxiv.org/abs/1402.5539.